A8

A8: Finde alle Lösungen für Ax = b.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ b. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 7 \end{array}\right] (-1, 0, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \end{array}\right] (0, -1, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \checkmark$$

$\uparrow$ frei $\uparrow$

partikulare Lösung: setze freie Variablen auf 0

$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 6$, $x_1 = 1$ $\quad x_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$

Kern(A): $x_2 = 1, x_4 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$, $x_1 = -3$ $\quad x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0, x_4 = 1$

$x_3 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_3 - 4$

$x_1 + 2x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$ $\quad x' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \end{bmatrix} ; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

.b

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & -6 \end{array}\right] (-2, 1, 0)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & -6 \end{array}\right] (-3, 0, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right] (0, 1, 1)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \checkmark$$

frei

partikulare Lösung: setze freie Variablen auf 0

$2x_3 = 6 \Rightarrow x_3 = 3$

$x_1 + 3x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = -9$

$\Rightarrow x_p = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

Bestimmung Kern(A) $x_2 = 1, x_4 = 0$: $2x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_1 + 2x_2 = x_1 + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$x_2 = 0, x_4 = 1$: $2x_3 + 2 = 0 \Rightarrow x_3 = -1$

$x_1 + 3x_3 + 5x_4 = x_1 - 3 + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = -2$

$x' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; c, d \in \mathbb{R} \right\}$$