

A1: Schreibe das Gleichungssystem in Matrixform und löse mit einer einfachen Linear-kombination der Spalten.

a.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned}$$

b.

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 &= 3 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \end{aligned}$$

A2: Löse $Ax = b$ mit Elimination und Rücksubstitution.

$$a. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \quad b. A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 4 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 16 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$a. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B$$

- (1) Bestimme den Typ (n x m) von C
- (2) Berechne $c_{3,2}$ - Notiere die Rechnung als Skalarprodukt.
- (3) Berechne die 1. Spalte von C - Notiere die Rechnung als Linearkombination geeigneter Vektoren.
- (4) Berechne die 2. Zeile von C - Notiere die Rechnung als Linearkombination geeigneter Vektoren.

$$b. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = A \cdot B$$

- (1) Bestimme den Typ (n x m) von C
- (2) Berechne $c_{3,2}$ - Notiere die Rechnung als Skalarprodukt.
- (3) Berechne die 2. Spalte von C - Notiere die Rechnung als Linearkombination geeigneter Vektoren.
- (4) Berechne die 4. Zeile von C - Notiere die Rechnung als Linearkombination geeigneter Vektoren.

A4: Aus Matrix A ist die Stufenform U durch die angegebenen Operationen entstanden. Schreibe für jede Operation eine Matrix und formuliere mit diesen Matrizen eine Matrixgleichung die A und U verbindet (die Matrix-Multiplikationen müssen nicht durchgeführt werden)

$$a. A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & -3 & -7 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- (1) Vertausche Zeile 1 und 2
- (2) Addiere zu Zeile 2 das -3-fache von Zeile 1
- (3) Addiere zu Zeile 3 das 2-fache von Zeile 1
- (4) Addiere zu Zeile 3 das 1-fache von Zeile 2

$$b. A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -6 & -5 & -8 \\ 8 & 3 & 17 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- (1) Vertausche Zeile 2 und 3
- (2) Addiere zu Zeile 2 das -4-fache von Zeile 1
- (3) Addiere zu Zeile 3 das 3-fache von Zeile 1
- (4) Addiere zu Zeile 3 das -2-fache von Zeile 2

A5: Ermittle die LU-Faktorisierung für Matrix A.

$$a. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & -5 \\ 0 & 9 & 1 \end{bmatrix} \quad b. A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$$

A6: Ermittle mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus die Inverse der Matrix A.

$$a. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad b. A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -3 & -4 & -3 \\ -4 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

A7: Gegeben sei eine 5x5 Matrix A. Die Matrix B gehe aus A durch die angegebenen Operationen hervor. Gib eine Matrix P an, die die angegebenen Operationen durchführt und formuliere eine Gleichung mit A, B und P.

- a. Tausch der 1. mit der 4. Zeile, dann Tausch der 5. mit der 2. Zeile, dann Tausch der 2. mit der 3. Zeile.
- b. Tausch der 1. mit der 3. Spalte, dann Tausch der 5. mit der 4. Spalte.

A8: Finde alle Lösungen für $Ax = b$.

$$a. A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \quad b. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$

A9: Lies aus der Matrix A und ihrer rref-Form folgende Angaben ab: Anzahl pivots und Anzahl freier Variablen bei der Elimination, $\text{Rang}(A)$, Dimension $\text{Bild}(A)$, Dimension $\text{Kern}(A)$, eine Basis von $\text{Bild}(A)$, eine Basis von $\text{Kern}(A)$.

$$\text{a. } A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{b. } A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & 3 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 & 7 & -11 \\ -1 & 2 & -6 & -8 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$