# Lineare Algebra

## Zeilensicht und Spaltensicht

In der linearen Algebra möchte man lineare Gleichungsystem mit mehreren Unbekannten lösen.

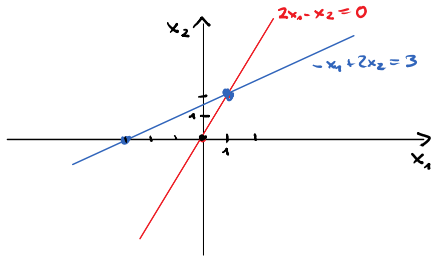
Beispiel 1:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 3 \end{aligned}$$

Die Matrix-Form für dieses Gleichungssystems:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}} \cdot \underset{x}{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}}$$

$$A \cdot x = b$$

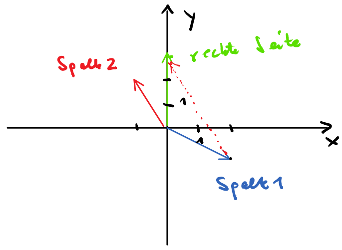



Die Zeilensicht:

In welchem Punkt schneiden sich die beiden Geraden?

$$\underbrace{x_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}}$$

Linearkombination der Spalten




Die Spaltensicht:

Welche Linearkombination der Spalten ergibt b?

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \qquad &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1 \\ -3x_2 + 4x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot x = b$$

Die Zeilensicht: In welchem Punkt schneiden sich die drei Ebenen?

Die Spaltensicht: Welche Linearkombination der 3 Spaltenvektoren ergibt b?

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ist $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ Lösung

Können wir Ax = b für jedes b lösen? Für diese Matrix A: ja

Wenn alle Spaltenvektoren in derselben Ebene liegen würden, hieße die Antwort: Nein.

> Die Matrixform für ein lineares Gleichungssystem ist Ax = b.
> In der Zeilensicht fragen wir, in welchem Punkt sich drei Ebenen schneiden (bei 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten).
> In der Spaltensicht fragen wir, welche Linearkombination der Spaltenvektoren die rechte Seite ergibt.

A1

## Elimination und Rücksubstitution

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 8x_2 + x_3 &= 12 \\ 4x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

pivot

augmentierte Matrix

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad (-3, 1, 0)$$

Zeile 2 ersetzen wir durch die Linearkombination:
-3*Zeile1 + 1*Zeile2 + 0*Zeile3

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{matrix} \qquad (0, -2, 1)$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \end{array}\right]$$

$U$

U = upper triangular matrix

Für 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten gilt: Wenn wir bei der Elimination 3 pivots finden, dann können wir mit Rücksubstitution eine eindeutige Lösung finden.

Wenn an der pivot-Position eine 0 steht, müssen wir weiter unten schauen und ggf. die Zeilen tauschen. Wenn es dort auch nur Nullen gibt, finden wir keine 3 pivots und es gibt keine eindeutige Lösung (keine oder unendlich viele)

Die Elimination und ggf. das Tauschen von Zeilen wollen wir als eine Folge von Matrix-Operationen beschreiben.

> Wenn Elimination für jede Spalte der Matrix ein pivot-Element liefert, so können wir durch Rücksubstitution das Gleichungssystem eindeutig lösen.

A2

## Matrixmultiplikation

$$\underset{3\times 2}{\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}} \cdot \underset{2\times 4}{\overset{B}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}}} = \underset{3\times 4}{\overset{C}{\begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -5 \\ 12 & 2 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}}$$

$c_{23} = 13$

Reihe Spalte

1. Zeile * Spalte

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -5 \\ 12 & 2 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$c_{24} \quad 2\cdot(-1) + 3\cdot(-2) = -8$

2. Matrix * Spalten

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -5 \\ 12 & 2 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 13 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jede Spalte von C ist eine Linearkombination der Spalten von A

3. Zeilen * Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -5 \\ 12 & 2 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\cdot\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}^T + 3\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 12 \\ 2 \\ 13 \\ -8 \end{bmatrix}^T$$

$T$: transponierte Spalte = Zeile

4. Spalte * Zeile

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{C_1}{\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \underset{C_2}{\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 & -4 \\ 6 & 0 & 9 & -6 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}}$$

$$C_1 + C_2 = C = \begin{bmatrix} 7 & 1 & 8 & -5 \\ 12 & 2 & 13 & -8 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

> Die Multiplikation zweier Matrizen kann auf vier verschiedene Arten erfolgen, die alle zum gleichen Ergebnis führen.

A3

## Quadratische Matrizen

Matrizen, bei denen die Anzahl der Zeilen mit der Anzahl der Spalten übereinstimmen, nennt man man quadratische Matrizen.

## Einheitsmatrix

Eine quadratische Matrix mit 1 in der Diagonale und sonst 0 heißt Einheitsmatrix.

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Für jede Matrix A gilt: A * I = A und I * A = A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{A}$$

## Eliminationsmatrizen

Die Eliminationsmatrix $E_{21}$ sorgt dafür, dass an Position 21 eine Null entsteht.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Position 21

Die Eliminationsmatrix $E_{32}$ sorgt dafür, dass an Position 32 eine Null entsteht.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Position 32

Wir können die Elimination als eine Folge von Matrixmultiplikationen schreiben:

$$E_{32}(E_{21}A) = U$$

$$(E_{32}E_{21})A = U$$ ohne Beweis: Assoziativität: wir können Umklammern

Matrix-Multiplikation ist nicht kommutativ, d.h. wir dürfen in der Regel die Reihenfolge nicht vertauschen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Falls wir bei der Elimination Zeilen vertauschen müssen, verwenden wir Permutationsmatrizen.

## Permutationsmatrizen

Zum Vertauschen von Zeilen einer Matrix A führen wir die entsprechende Operation mit der Einheitsmatrix durch und multiplizieren sie von links mit A (Zeilensicht).

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Zeile 2 und 3 sind vertauscht

## Die Schritte des Gauss-Verfahrens als Matrizenoperationen

Wenn wir die Elimination schrittweise durchführen, erkennen wir zwischendrin, ob Zeilenvertauschungen notwendig sind.
Wir können die Zeilen auch ganz zu Beginn tauschen und dann die Elimination durchführen.

$$E \cdot P \cdot A = U$$

Eliminationsmatrizen, Permutationsmatrix, Upper triangular Matrix

Beispiel: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

U geht aus A hervor durch folgende Operationen.
1. Vertausche Zeile 2 und 3
2. Addiere zu Zeile 2 das -2-fache von Zeile 1
3. Addiere zu Zeile 3 das -1-fache von Zeile 1

Wir können folgende Gleichung aufstellen:

$$\underbrace{\underset{E_{31}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}_{E} \cdot \underset{P}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \cdot A = U$$

A4

## Die Inverse einer quadratischen Matrix

Wenn es eine Matrix $A^{-1}$ gibt mit $A^{-1} \cdot A = I$, dann heißt A invertierbar. Nicht-invertierbare Matrizen nennt man auch singulär. Es gilt dann auch: $A \cdot A^{-1} = I$

Beispiel: Wir wollen die Matrix, die die Operationen von $E_{21}$ wieder rückgängig macht.

$$\underset{\text{addiere zu Zeile 2 dreimal Zeile 1}}{\overset{E_{21}^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} \cdot \underset{\text{subtrahiere von Zeile 2 dreimal Zeile 1}}{\overset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}} = \overset{I}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

Beispiel für eine singuläre Matrix:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & ? \\ & \cdot \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ geht nicht.

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ müsste sich als Linearkombination der Spalten von A darstellen lassen

Andere Begründung: A hat keine Inverse, weil man einen Vektor $x \neq 0$ (d.h $x \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$) angeben kann, mit Ax = 0. $x = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Annahme: $A^{-1}$ existiert, dann: $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = x = Ix = (A^{-1}A)x = A^{-1}(Ax) = A^{-1}0 = 0$ ↯

Wenn A und B invertierbar sind, dann gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Beweis: $(A \cdot B)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A(B \cdot B^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$

## Matrixfaktorisierungen: A = LU und PA = LU

Das Eliminationsverfahren können wir als Matrixprodukt darstellen

$$E_{32} E_{31} E_{21} \cdot P \cdot A = U \quad | \, (E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot E_{32}^{-1})$$

$$(E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot E_{32}^{-1}) \cdot E_{32} \cdot E_{31} \cdot E_{21} \cdot P \cdot A = \underbrace{E_{21}^{-1} \cdot E_{31}^{-1} \cdot E_{32}^{-1}}_{L} \cdot U$$

Die Inversen sind auch Eliminationsmatrizen und deren Produkt ist eine untere Dreiecksmatrix L

$$\boxed{PA = LU}$$

U hat 0 unterhalb der Hauptdiagonalen (upper triangular matrix)
L hat 0 oberhalb der Hauptdiagonalen (lower triangular matrix)

Wenn bei der Elimination keine Zeile vertauscht werden muss, dann gilt:

$$\boxed{A = LU}$$

Wenn wir einfache Eliminationsschritte verwenden (d.h. nur die Pivot-Zeile mit einem Faktor versehen), können wir die Elemente von L an Faktoren der Elimination ablesen.

Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad (-2, 1, 0)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad (-1, 0, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 9 & 5 \end{bmatrix} \quad (0, -3, 1)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = U$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = U$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot U$$

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}}_{= L} \cdot U$$

A5

## Gauss-Jordan Algorithmus zur Berechnung der inversen Matrix

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spaltensicht: $A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ein Problem vom Typ Ax = b

Wir müssen zweimal eine Elimination nach Gauss machen (jetzt kommt Jordan hinzu)
Gauss-Jordan löst zwei Gleichung gleichzeitig.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\quad A \quad\quad I \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad I \quad\quad A^{-1}$$

Gauss würde hier aufhören, aber Jordan macht von unten nach oben weiter, um links die Einheitsmatrix zu erzeugen.

Warum funktioniert das?

$$E[A \mid I] \longrightarrow [I \mid \underbrace{E}_{= A^{-1}}] \qquad EA = I \Rightarrow E = A^{-1}$$

Übung: Bestimme die Inverse zu A = $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1, 2, 0)$$

Addiere zum 2-fachen der 2.Zeile die 1.Zeile

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (-1, 0, 1)$$

Subtrahiere von der 3.Zeile die 1.Zeile

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (0, 4, 1)$$

Addiere zur 3.Zeile das 4-fache der 2.Zeile

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad (0, 1, -1)$$

Subtrahiere von der 2.Zeile die 3.Zeile

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{bmatrix} \quad (1, 0, -3)$$

Subtrahiere von der 1.Zeile das 3-fache der 3.Zeile

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -8 & -24 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \end{bmatrix} \quad (1, -1, 0)$$

Subtrahiere von der 1.Zeile die 2.Zeile

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & -8 & -24 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right] \quad (1,-1,0)$$

Subtrahiere von der 1.Zeile die 2.Zeile

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -6 & -18 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 8 & 1 \end{array}\right] \quad (0.5,0,0)$$

Multipliziere die 1.Zeile mit 0.5

$$\Bigg[\underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{I}\ \underbrace{\begin{matrix} -3 & -9 & -1 \\ -2 & -6 & -1 \\ 3 & 8 & 1 \end{matrix}}_{A^{-1}}\Bigg] = [I \,|\, A^{-1}]$$

A6

Wenn wir bei der Elimination in jeder Zeile ein pivot-Element finden, dann ist die Matrix invertierbar.

Es gilt: $(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ , denn: $(AB)(B^{-1} \cdot A^{-1}) = A\underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{I}A^{-1} = I$

## Die Transponierte einer Matrix

Die transponierte Matrix $A^T$ geht aus A hervor, indem die Zeilen von A die Spalten von $A^T$ werden (gilt auch für nicht-quadratische Matrizen).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (A^T)_{ij} = (A^T)_{ji}$$

Es gilt:
a. $(A+B)^T = A^T + B^T$
b. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$
c. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Beweis: a. ist unmittelbar einleuchtend

b. $Ax$ ist eine Linearkombination der Spalten von A.
$x^T A^T$ ist eine Linearkombination der Zeilen von $A^T$
$\Big\}\ (Ax)^T = x^T A^T$

Bsp: $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}}_{Ax}$ $\qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{x^T} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}}_{x^T \cdot A^T}$

Transponieren von $A \cdot B = \begin{bmatrix} Ax_1 & Ax_2 & \dots \end{bmatrix}$ ergibt also $\begin{bmatrix} x_1^T A^T \\ x_2^T A^T \\ \vdots \end{bmatrix} = B^T A^T$

c. $A^{-1} \cdot A = I \Rightarrow (A^{-1} \cdot A)^T = A^T \cdot (A^{-1})^T = I^T = I \Rightarrow (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

## Permutationsmatrizen

Eine Permutationsmatrix hat dieselben Zeilen wie I, nur in anderere Reihenfolge. Es gibt n! verschiedenen Reihenfolgen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wenn man zwei dieser Permutationsmatrix miteinander multipliziert, bleibt man in dieser Gruppe, wenn man invertiert bleibt man auch in dieser Gruppe.

Es gilt: $P^{-1} = P^T$ $\qquad$ d.h.: $P^T P = I$

A7

invertiert bleibt man auch in dieser Gruppe.

Es gilt: $P^{-1} = P^T$ d.h.: $P^T P = I$

A7

### Symmetrische Matrizen

Falls gibt: $A^T = A$ dann heißt A symmetrisch

$A^T \cdot A$ ist immer symmetrisch, denn $(A^T \cdot A)^T = A^T \cdot A^{TT} = A^T A$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}}_{A^T} = \underbrace{\begin{bmatrix} 10 & 11 & 7 \\ 11 & 13 & 11 \\ 7 & 11 & 17 \end{bmatrix}}_{A \cdot A^T}$$

## Vektorräume und Unterräume

Die Definition von Vektorraum umfasst 8 Regeln, die erfüllt sein müssen. Wir begnügen uns hier mit der intuitiven Definition: ein Vektorraum muss alle Linearkombinationen seiner Elemente enthalten.

Ein Unterraum ist ein Vektorraum in einem Vektorraum.

Beispiele: $\mathbb{R}^2$ Vektorraum aller 2-dimensionalen reellen Vektoren. $\mathbb{R}^2$ ohne $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ wäre kein Vektorraum

Der 1. Quadrant ist kein Vektorraum, da er nicht abgeschlossen für Linearkombinationen ist.

Welche Unterräume gibt es in $\mathbb{R}^2$?

1. $\mathbb{R}^2$
2. Eine Gerade, die durch die 0 geht.
3. $\{0\}$

Jeder Unterraum muss den 0-Vektor enthalten

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ alle Linearkombinationen der Spalten bilden einen Unterraum in R3: den Spaltenraum von A,
C(A) (column space)
Bild(A)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ Bild(A) ist ein Unterraum von R4

Ax = b hat genau dann eine Lösung, wenn b in Bild(A).

In C(A) sind beispielsweise: $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\left(x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\left(x = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)$

In dem Beispiel kann man eine Spalte weglassen und bekommt trotzdem denselben Spaltenraum.

Der Kern(A) enthält alle Lösungen der Gleichung Ax = 0.

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$, $c \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$

Der Kern(A) ist ein Unterraum von R3. $v, w \in \text{Kern}(A) \Rightarrow A(v+w) = Av + Aw = 0$

↑ Distributivgesetz

$A(cv) = cAv = 0$

Die Lösungen für $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ bilden keinen Vektorraum, weil 0 keine Lösung ist.

### Alle Lösungen für Ax = 0

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$

Spalte 2 ist das doppelte von Spalte 1
Zeile 3 ist Zeile 1 + Zeile 2
Spalten und Zeilen sind nicht unabhängig.

Wenn man Zeilenoperationen macht, ändert man das Bild von A, aber nicht den Kern von A.

$[1 \quad 2 \quad 2 \quad 2]$ pivot

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Wenn man Zeilenoperationen macht, ändert man das Bild von A, aber nicht den Kern von A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

pivot

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

Auch durch Zeilenaustausch ist kein Pivot-Element für diese Spalte möglich. Das bedeutet: Diese Spalte ist eine Kombination der früheren Spalten.

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

U ist in Stufenform (echelon-form) Ax = 0 hat dieselben Lösungen wie Ux = 0.

Spalten ohne pivots = freie Spalten

r = Anzahl pivots = 2 = der Rang der Matrix

freie Spalten: Variablen der freien Spalten kann man beliebig setzen, dann die anderen durch Rücksubstitution. Geschickte Wahl mit 0 und 1 üblich.

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jede Linearkombination von x1 und x2 ist im Kern(A).

freie Spalte 2 freie Spalte 4

## Matrix R : reduced row echelon form (rref)

Die rref-Matrix R hat Nullen über und unter den pivots und die pivots sind alle 1

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Die pivot-Zeilen und Spalten bilden die Einheitsmatrix

$$x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In den freien Spalten sehen wir die speziellen Lösungen mit umgekehrtem Vorzeichen.

Wenn wir die pivot und freien Spalten nebeneinander schreiben, haben wir für R die folgende Gestalt:

$$R = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} \\ \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \} r$$

r = Rang der Matrix A = Anzahl pivots

Beispiel 1:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 6 & 8 \\ 2 & 8 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wir erkennen: Spalte 3 ist freie Spalte, d.h. eine Kombination der ersten beiden.

Eine spezielle Lösung für Ax = 0 ist:

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \} -F \\ \leftarrow \text{freie Spalte 3} \end{matrix}$$

$$\mathrm{Kern}(A) = \left\{ c \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} ; \ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Rang(A) = 2

Beispiel 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 & 12 \\ 3 & 6 & 7 & 13 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Spalte 2 ist freie Spalte d.h. ein Vielfaches der 1. Spalte. Eine spezielle Lösung für Ax = 0 ist:

$$x = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rang(A) = 3

$$\text{Kern}(A) = \left\{ c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} ;\ c \in \mathbb{R} \right\}$$

Beispiel 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 8 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{rref}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Spalten 3 und 5 sind freie Spalten, d.h. Spalte 3 ist Kombination von Spalte 1 und 2 und Spalte 5 ist Kombination von Spalte 1,2,4.

$$x_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Kern}(A) = \{ c \cdot x_1 + d \cdot x_2 ;\ c, d \in \mathbb{R} \}$$

## Alle Lösungen für Ax = b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$$

Zeile 3 = Zeile 1 + Zeile 2 $\Rightarrow$ $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$ hat keine Lösung.

Wir erkennen dies, wenn wir die Elimination mit der augmentierten Matrix durchführen.

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{keine Lösung}$$

Die Elimination für b = $\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

$$[Ab] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 5 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 8 & 10 & 6 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

Lösbarkeit: Bedingung für die rechte Seite:

Ax = b ist lösbar genau dann wenn b in dem Bild von A ist.
oder:
Wenn eine Linearkombination der Zeilen die 0-Zeile ergibt, dann muss dieselbe Kombination der Komponenten von b Null ergeben.

## Algorithmus zur Lösung Ax = b

1. Eine partikulare Lösung: setze alle freien Variablen = 0. Dann löse Ax = b für die Pivot-Variablen.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

frei

$$x_2 = x_4 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 3 \Rightarrow x_3 = 3/2$$
$$x_1 + 2x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -2$$

$$x_p = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

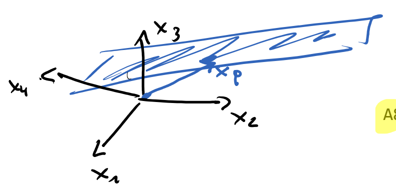
2. Bestimme den Kern(A). Alle Lösungen sind dann: $x_p + \text{Kern}(A)$

$Ax_p = b$. Für $x' \in \text{Kern}(A)$ gilt dann: $A(x_p + x') = Ax_p + Ax' = b$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 3/2 \\ 0 \end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

(Kern(A) ist oben bestimmt worden)

L ist kein Vektorraum, sondern ein "verschobener Vektorraum", eine verschobene Ebene im 4-dimensionalen Raum.




A8

## Die verschiedenen Fälle

A m x n Matrix vom Rang r

$$A = \begin{array}{c c} & n \\ m & [\quad] \end{array}$$

r = Anzahl pivots, d.h. r <= m und r <= n

| $r = n = m$ | $r = n < m$ | $r = m < n$ | $r < m,\ r < n$ |
|---|---|---|---|
| $R = I$ | $R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$ | $R = [\underbrace{I}_{r}\ F]$ | $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ |
| 1 Lösung für $Ax = b$ | 0 oder 1 Lösung | $\infty$ Lösungen | 0 oder $\infty$ Lösungen |

## Lineare Unabhängigkeit, Spann, Basis, Dimension eines Vektorraums

Vektoren v1, v2, …. vn sind (linear) unabhängig, wenn es keine Linearkombination für die 0 gibt (außer die 0-Kombination).

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$$

Das bedeutet: kein Vektor kann als Linearkombination der anderen Vektoren dargestellt werden.

Eine Menge von Vektoren, die den Nullvektoren enthält, ist nie linear unabhängig.

Wenn wir die Vektoren als Spaltenvektoren einer Matrix ansehen, können wir formulieren:

$$A = [v_1\ v_2 \dots v_n] \qquad \text{Kern}(A) = \{0\} \iff v_1, v_2, v_3 \text{ linear unabhängig} \iff \text{rang}(A) = n$$

Der Spann der Vektoren v1, v2,…. vl besteht aus allen Linearkombinationen dieser Vektoren. Die Spalten einer Matrix A spannen das Bild von A auf

Eine Basis für ein Vektorraum ist eine Menge von unabhängigen Vektoren, die den gesamten Vektorraum aufspannen.

Beispiele: $\mathbb{R}^3$ : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ Die Spalten als Matrix gibt I. I hat nur 0 im Kern, also unabhängig. Die Vektoren sind eine Basis für R3

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$ Die Vektoren sind keine Basis für, der Rang der Matrix ist 2, Der Spann ist ein 2D-Unterraum von R3. Die Vektoren sind keine Basis für diesen Unterraum.

Es gilt: $A = [v_1\ v_2\ v_3]$ invertierbar $\iff v_1, v_2, v_3$ sind Basis von $\mathbb{R}^3$

Es gibt unendliche viele Basen von R3, aber alle enthalten 3 Vektoren.

Gegeben ein Vektorraum. Dann hat jede Basis dieselbe Anzahl von Vektoren. Diese Zahl heißt Dimension des Vektorraums.

$$A = \overbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}}^{n} \Big\} m \qquad \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \text{Kern}(A)$$

$$r = \text{rang}(A) = 2 \qquad \text{Basis} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \text{ oder } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim(\text{Bild}(A)) = \underbrace{r}_{\text{Anzahl pivots}} = 2, \qquad \dim(\text{Kern}(A)) = \underbrace{n - r}_{\text{Anzahl freie Variablen}} = 3$$

A9