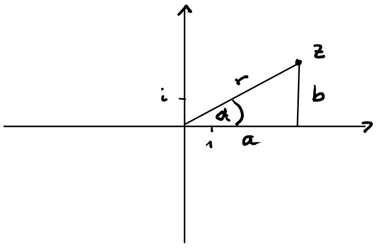
Komplexe Zahlen

Die Gaußsche Zahlenebene

Komplexe Zahlen stellen wir uns vor als Punkte auf einer Ebene (Gaußsche Zahlenebene)



$z = a + ib$ Kartesische Darstellung

a = Realteil von z = Re(z)
b = Imaginärteil von z = Im(z)

$z = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$ Polardarstellung

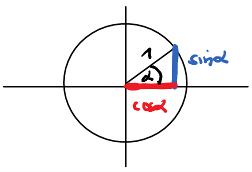
r = Betrag von z = $|z|$
α = Argument von z = arg(z)

$$\left.\begin{array}{l} \sin\alpha = \frac{b}{r} \Rightarrow b = r \cdot \sin\alpha \\ \cos\alpha = \frac{a}{r} = a = r \cdot \sin\alpha \end{array}\right\} a + ib = r \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha)$$

Wiederholung: Einheitskreis, Bogenmaß, sin, cos

α in Grad	0	30	45	60	90
α in Bogenmaß	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

$(= \frac{1}{2}\sqrt{k} \quad k = 0, .., 4)$



Am Einheitskreis können wir ablesen:

$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin\alpha, \quad \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(2\pi - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha, \quad \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

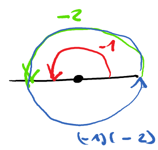
Addition und Multiplikation komplexer Zahlen

Addition wie Vektoraddition, Multiplikation: die Beträge werden multipliziert, die Winkel (Argumente) addiert. $\Rightarrow i^2 = -1$

Falls die komplexen Zahlen auf dem reellen Zahlenstrahl liegen, sind dies die für reelle Zahlen üblichen Operationen.

$(-1) \cdot (-2) = 2$

Es gelten die üblichen Rechenregeln.



$z_1 = 3 + 2i, \quad z_2 = -7 + 8i \qquad z_1 + z_2 = 3 - 7 + (2+8)i = -4 + 10i$

$z_1 \cdot z_2 = (3+2i)(-7+8i) = -21 + 24i - 14i + 16i^2 = -21 - 16 + 10i = -37 + 10i$

Konjugiert komplexe Zahl

Konjugiert komplexe Zahl = Spiegelung an der reellen Achse

$\overline{z_1} = 3 - 2i, \quad \overline{z_2} = -7 - 8i$

Kehrwert

Kehrwert umformen mit 3.Binomischer Formel

$$\frac{1}{z_1} = \frac{1}{3+2i} = \frac{1 \cdot (3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{3-2i}{9+4} = \frac{3}{13} - \frac{2}{13}i$$

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{-7+8i}{3+2i} = \frac{(-7+8i)(3-2i)}{9+4} = \frac{-21+14i+24i-16i^2}{13} = \frac{-21+16}{13} + \frac{38}{13}i = \frac{-5}{13} + \frac{38}{13}i$$

Potenzen

$$(4+4i)^{10} = 4^{10}(1+i)^{10} \qquad z = 4+4i\,,\quad |z| = \sqrt{32}$$

$$\arg(z) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \arg(z^{10}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (4+4i)^{10} = \sqrt{32}^{10}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \qquad (\sqrt{32})^{10} = 32^5 = (2^5)^5 = 2^{25}$$

$$= 2^{25}\, i$$

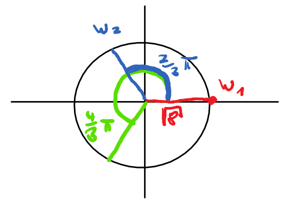
Wurzeln

$z^3 = 8$ Für Lösungen w gilt: $|w| = \sqrt[3]{8}$ und $3\cdot\arg(w) = 2\pi k \quad k\in\mathbb{Z}$

$\alpha_1 = 0$: $w_1 = \sqrt{8}$

$\alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$: $w_2 = \sqrt{8}\cdot\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$

$\alpha_3 = \frac{4\pi}{3}$: $w_3 = \sqrt{8}\cdot\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$

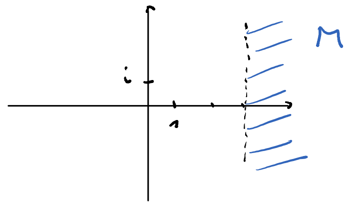


Teilmengen von $\mathbb{C}$

- $M = \{z\in\mathbb{C}\,;\ z+\bar{z} \geq 6\}$

  $z = a+ib$

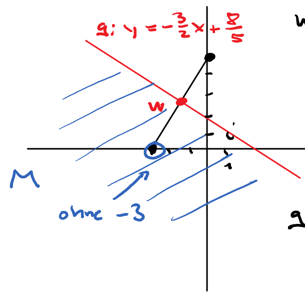
  $z+\bar{z} = 2a \geq 6 \iff a \geq 3$



- $M = \left\{z\in\mathbb{C}\,;\ \left|\frac{z-5i}{z+3}\right| \geq 1 \text{ und } z \neq -3\right\}$

  $|z-5i| = |z+3|$

  z hat zu $5i$ den gleichen Abstand wie zu -3.



$w = -3 + \frac{1}{2}(5i+3)$

$= -1{,}5 + \frac{5}{2}i$

$g: y = -\frac{3}{5}x + b$

$\frac{5}{2} = -\frac{3}{5}\left(-\frac{3}{2}\right) + b$

$b = \frac{25}{10} - \frac{9}{10} = \frac{8}{5}$

Eulersche Formel

Mittels Potenzreihenentwicklung lässt sich zeigen:

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

Für $\alpha = \pi$ ergibt sich: $e^{i\pi} = -1$

Häufig wird die Polardarstellung einer komplexen Zahl notiert als: $z = r\cdot e^{i\alpha}$