A2021

a) $$p(x) = \underbrace{(x-1)\cdot(x+1)}_{\text{binom. Formel}}(x-3)$$

$$= (x^2-1)(x-3) = \underbrace{x^3-3x^2-x+3}_{\text{Dies hat Form } (*)\text{.}}$$

b) $$p(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = (x^2 - xx_2 - x_1x + x_1x_2)(x-x_3)$$

$$= x^3 - x^2x_3 - x^2x_2 + xx_2x_3 - x_1x^2 + x_1xx_3 + x_1x_2x - x_1x_2x_3$$

$$= x^3 + x^2(-x_3-x_2-x_1) + x(x_2x_3+x_1x_3+x_1x_2) - x_1x_2x_3 \quad \text{(Form } *)$$

Formeln für a, b, c:

$$a = -(x_1+x_2+x_3)$$

$$b = x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2$$

$$c = -x_1x_2x_3$$

c) $$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$p(2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 8 + 4a + 2b + c = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = -8-4a-2b = 2\overbrace{(-4-2a-b)}^{\in \mathbb{Z}\text{, da } a,b,c\in\mathbb{Z}}$$

Da die Koeffizienten a, b, c nach Voraussetzung ganzzahlig sind, ist auch $(-4-2a-b)$ ganzzahlig. Also ist c durch 2 teilbar $\square$

A 2020 $\quad f(x) = (x+4)^2 \quad , \quad h(x) = \frac{1}{5}(x^2-4)$

a) Nullstellen f: $\quad x = -4 \quad$ (doppelt)

g: $\quad x_1 = 2, \quad x_2 = -2$

Schnittpunkte: $(x+4)^2 = \frac{1}{5}(x^2-4)$

$x^2 + 8x + 16 = \frac{1}{5}(x^2-4) \quad | \cdot 5$

$5x^2 + 40x + 80 = x^2 - 4$

$4x^2 + 40x + 84 = 0 \quad | : 4$

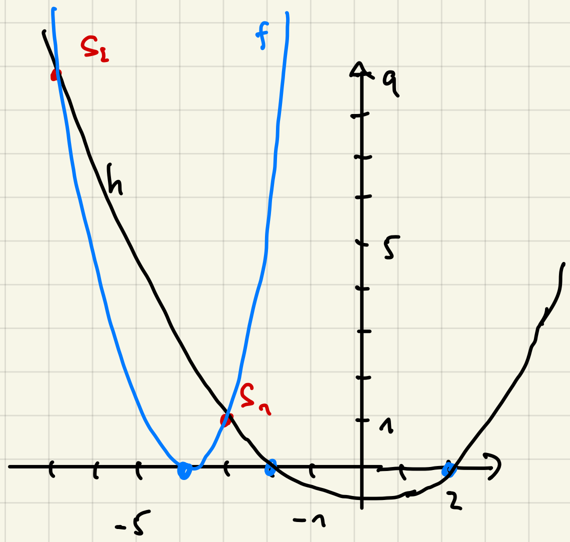
$x^2 + 10x + 21 = 0$

Vieta: $x_1 = -3, \; x_2 = -7$

$f(-3) = 1, \quad f(-7) = 9$

Schnittpunkte: $S_1(-3/1), \quad S_2(-7/9)$

b) Skizze:



c) $h(x) \le f(x) \quad : \quad L = (-\infty, -7] \cup [-3, \infty)$

d) $\sqrt{\frac{1}{5}(x^2-4)} \le (x+4) \qquad D = (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$

1. Fall $\quad x+4 \ge 0$

$x \ge -4 \; : \qquad \sqrt{\frac{1}{5}(x^2-4)} \le (x+4) \quad | \; ()^2$

$\frac{1}{5}(x^2-4) \le (x+4)^2 \qquad$ ist Ungleichung aus c)

$L_1 = \left((-\infty,-7] \cup [-3,\infty)\right) \cap D = [-3,-2) \cup [2,\infty)$

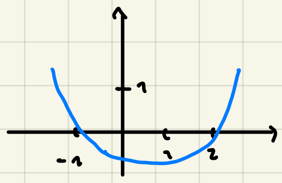
2. Fall: $\quad x+4 < 0$: keine Lösung, da $\sqrt{}$ immer ≥ 0.

$\Rightarrow \quad L = [-3,-2) \cup [2,\infty)$

A2019:

a) $\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

Skizze der Funktion im Nenner:



Fall 1: $(x+1)(x-2) \geq 0$

d.h. $x \in (-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

$$\frac{4x-5}{(x+1)(x-2)} \leq 0 \quad \Big| \cdot (x+1)(x-2)$$

$$4x-5 \leq 0$$

$$x \leq \frac{5}{4} \qquad L_1 = (-\infty, -1)$$

Fall 2: $x \in (-1, 2)$

$$4x-5 \geq 0$$

$$x \geq \frac{5}{4} \qquad L_2 = \left[\frac{5}{4}, 2\right) \qquad \Rightarrow \quad L = (-\infty, -1) \cup \left[\frac{5}{4}, 2\right)$$

b) $\dfrac{4x-5}{(x+1)(x-2)} = \dfrac{A}{(x+1)} + \dfrac{B}{(x-2)} \qquad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$

$$4x-5 = A(x-2) + B(x+1)$$

$$4x-5 = (A+B)x - 2A + B$$

$$A + B = 4 \qquad (1)$$

$$-2A + B = -5 \qquad (2)$$

$$3A = 9 \qquad (1)-(2)$$

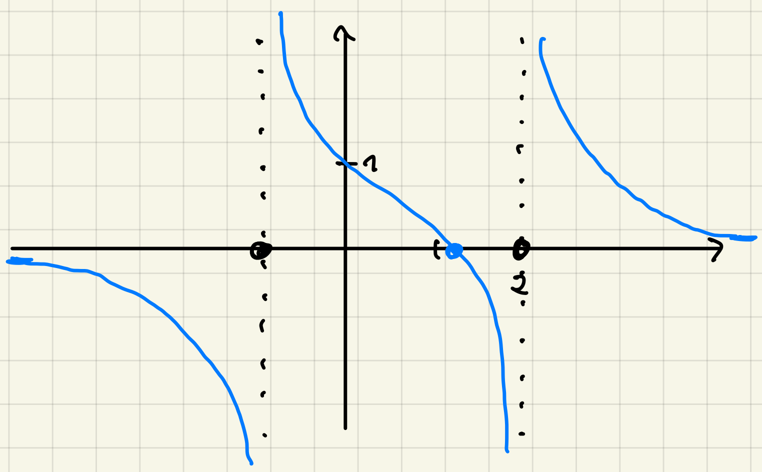
$$A = 3$$

$$B = 1$$

c) Polstellen: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, Polstellen sind einfach, also mit Vorzeichenwechsel

Nullstelle $x_0 = \frac{5}{4}$

Globales Verhalten: $x \xrightarrow[x \to \infty]{} +0$, $\quad x \xrightarrow[x \to -\infty]{} -0$



A 2018

a) $6x^2 - 12x + 7 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 24 \cdot 7}}{12}$$

$144 - 24 \cdot 7 < 0$, daher keine Lösung

$p(x)$ besitzt keine Nullstellen, $p(0) = 7 \Rightarrow p(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 3x - 2$ (1)

$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 2 - 3x$ (2)

Quadrieren ergibt für (1) und (2):

$$6x^2 - 12x + 7 = 9x^2 - 12x + 4$$
$$3x^2 = 3$$
$$x^2 = 1 \qquad x_{1/2} = \pm 1$$

Probe: $x = 1$ ist Lösung für (1)

$x = -1$ " (2)

c) $\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2 \qquad D = \mathbb{R}$ wg. a)

Fall 1: $3x - 2 \geq 0$

$3x \geq 2$

$x \geq 2/3$

$$6x^2 - 12x + 7 \leq 9x^2 - 12x + 4$$
$$3 \leq 3x^2$$
$$1 \leq x^2$$

$$L_1 = \big((-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\big) \cap [2/3, +\infty) = [1, +\infty)$$

Fall 2: $3x - 2 < 0$

keine Lösung da $\sqrt{}$ immer ≥ 0.

$$L = [1, +\infty)$$

A 2017

a) $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$

$p(-2) = -8 - 4 + 4 + 8 = 0 \Rightarrow -2$ ist Nullstelle

b) $(x^3 - x^2 - 2x + 8) : (x+2) = x^2 - 3x + 4$

$$\begin{array}{l} x^3 + 2x^2 \\ \hline \quad -3x^2 - 2x + 8 \\ \quad -3x^2 - 6x \\ \hline \qquad\quad 4x + 8 \end{array}$$

$x^2 - 3x + 4 = 0 \qquad x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 16}}{2}$ Kein Lösung, da Term unter Wurzel negativ

$\Rightarrow$ p hat keine weiteren Nullstellen.

c) $x^3 - x^2 - 2x + 8 = 8$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$

$x(x^2 - x - 2) = 0 \qquad \underline{x_1 = 0}$

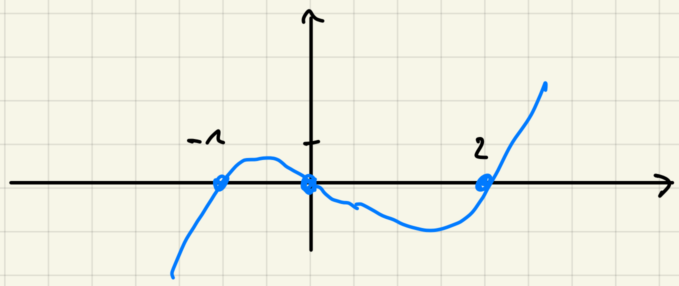
$x^2 - x - 2 = 0 \qquad$ Vieta: $\underline{x_2 = 2, \; x_3 = -1}$

d) $p(x) \leq 8$

$x^3 - x^2 - 2x \leq 0$

Skizze der Funktion auf linker Seite:

$L = (-\infty, -1] \cup [0, 2]$



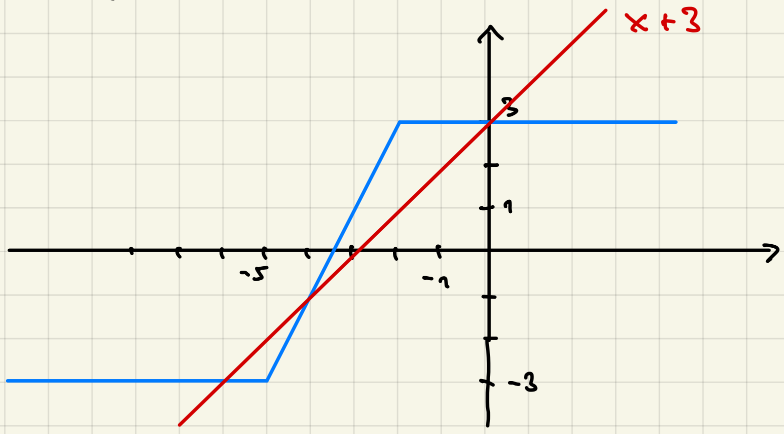
A2016

a) $f(x) = |x+5| - |x+2|$

Kritische Stellen: $x_1 = -5$, $x_2 = -2$

$I_1 = (-\infty, -5)$, $I_2 = [-5, -2)$, $I_3 = [-2, \infty)$

$$f(x) = \begin{cases} -(x+5) + (x+2) = -3 & x \in I_1 \\ x+5 + (x+2) = 2x+7 \quad \text{für} & x \in I_2 \\ (x+5) - (x+2) = 3 & x \in I_3 \end{cases}$$



b) $|x+5| - |x+2| = x+3$

$x \in I_1$: $-3 = x+3$
$x = -6 \in I_1 \Rightarrow L_1 = \{-6\}$

$x \in I_2$: $2x+7 = x+3$
$x = -4 \in I_2 \Rightarrow L_2 = \{-4\}$

$x \in I_3$: $3 = x+3$
$x = 0 \in I_3 \Rightarrow L_3 = \{0\}$

$L = \{-6, -4, 0\}$

c) $|x+5| - |x+2| \leq x+3$

aus a) und b) ergibt sich: $L = [-6, -4] \cup [0, \infty)$