A5 Ungleichungen

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Gleichung oder Ungleichung für reelle x.

a) $|x-5| = |x| + 2$

b) $(6x-5)(x+1)(x-2) \geq 0$

c) $\frac{x}{x-2} \geq \frac{3}{(x-2)^2}$

d) $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{x}$

e) $|x-2| + |4-x| \leq x+1$

f) $\frac{x+1}{x-1} > 2$

a) $|x-5| = |x|+2$

$x < 0$: $5 - x = -x + 2$

$5 = 2$ keine Lösung

$0 \leq x < 5$: $5 - x = x + 2$

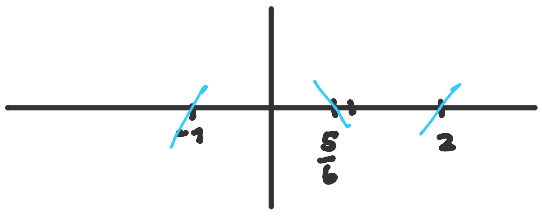
$2x = 3$, $x = \frac{3}{2}$

$5 \leq x$: $x - 5 = x + 2$ keine Lösung

$\mathbb{L} = \{\frac{3}{2}\}$

b) $(6x-5)\cdot(x+1)\cdot(x-2) \geq 0$

$6x - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{5}{6}$



$\mathbb{L} = [-1, \frac{5}{6}] \cup [2, \infty)$

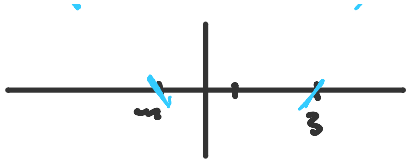
c) $\frac{x}{x-2} \geq \frac{3}{(x-2)^2} \quad | \cdot (x-2)^2 \quad (\geq 0\,!) \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x(x-2) \geq 3$

$x^2 - 2x - 3 \geq 0$

$x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \qquad x_1 = 3, \; x_2 = -1$

$\mathbb{L} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$



$\mathbb{L} = (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

d) $\frac{2}{x-1} > \frac{1}{x}$ $\qquad D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

Fall 1: $x > 0$ und $x - 1 > 0$, also $x > 1$:
oder $x < 0$ und $x - 1 < 0$, also $x < 0$:

$2x > x - 1$
$x > -1$ $\qquad$ Lösung: $(-1, 0) \cup (1, \infty)$

Fall 2: $0 < x < 1$

$2x < x - 1$
$x < -1$ $\qquad$ keine Lösung

$\mathbb{L} = (-1, 0) \cup (1, \infty)$

e) $|x-2| + |4-x| \leq x + 1$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & \text{für } x-2 \geq 0, \text{ d.h. } x \geq 2 \\ 2-x & \text{für } x-2 < 0 \text{ d.h. } x \leq 2 \end{cases}$$

$$|4-x| = \begin{cases} 4-x & \text{für } 4-x \geq 0, \text{ d.h. } 4 \geq x \\ x-4 & \text{für } 4-x \leq 0, \text{ d.h. } 4 \leq x \end{cases}$$

$$|x-2| + |4-x| = \begin{cases} 2-x+4-x = 6-2x & \text{für } x \leq 2 \quad (1) \\ x-2+4-x = 2 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \quad (2) \\ x-2+x-4 = 2x-6 & \text{für } x \geq 4 \quad (3) \end{cases}$$

(1) $6 - 2x \leq x + 1$
$-3x \leq -5$, $x \geq \frac{5}{3}$ $\qquad \mathbb{L}_1 = [\frac{5}{3}, 2]$

(2) $2 \leq x + 1$, $1 \leq x$ $\qquad \mathbb{L}_2 = [2, 4]$

(3) $2x - 6 \leq x + 1$, $x \leq 7$ $\qquad \mathbb{L}_3 = [4, 7]$

(3) $2x-6 \leq x+1$, $x \leq 7$ $\quad\quad$ $\mathbb{L}_3 = [4, 7]$

$\mathbb{L} = \left[\frac{5}{3}, 7\right]$

f) $\frac{x+1}{x-1} > 2$ $\quad\quad$ $x \neq 2$

1. Fall: $x-1 > 0$, d.h. $x > 1$

$x+1 > 2(x-1) = 2x-2$

$3 > x$ $\quad\quad$ $\mathbb{L}_1 = (1, 3)$

2. Fall: $x-1 < 0$, d.h. $x < 1$

$x+1 < 2(x-1) = 2x-2$

$3 < x$ $\quad\quad$ kein Lösung

$\mathbb{L} = (1, 3)$