

A10 Wurzelgleichung

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Ungleichungen.

a) $\sqrt{x^2+9} + x \leq 5, x \in \mathbb{R}$

b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6} \leq 4, x \in \mathbb{R}$

c) $\sqrt{x+2} + x \leq 4, x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{a) } \sqrt{x^2+9} + x &\leq 5 \\ \sqrt{x^2+9} &\leq 5-x \end{aligned}$$

Wir betrachten die beiden Seiten als Funktionen und berechnen den Schnittpunkt

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2+9} &= 5-x \quad | \quad ()^2 \\ x^2+9 &= 25-10x+x^2 \end{aligned}$$

$$10x = 16$$

$$x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

Punktprobe bei 0: $3 \leq 5 \Rightarrow \mathbb{L} = (-\infty, \frac{8}{5}]$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6} &\leq 4 && \text{für } x \geq 0 \\ \sqrt{x^2+6x} &= 4 && ()^2 \\ x^2+6x &= 16 \end{aligned}$$

$$x^2+6x-16 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36+64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 2$$

Nur $x=2$ kommt als Schnittpunkt in Frage

Probe: $\sqrt{4+12} = 4 \quad \checkmark$

Punktprobe bei $x=0$:

$$\sqrt{6} \leq 4 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{L} = [0, 2]$$

$$\text{c) } \sqrt{x+2} \leq 4-x \quad \text{für } x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2} = 4-x \quad | \quad ()^2$$

$$x+2 = 16-8x+x^2$$

$$x+2 = 16-8x+x^2$$

$$x^2-9x-14=0$$

$$x_{1/2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2$$

Probe: $\sqrt{9} = 4-7 = -3 \quad \times$

$\sqrt{4} = 4-2 = 2 \quad \checkmark$

nur bei $x=2$ liegt ein Schnittpunkt vor. Punktprobe bei $x=0$:

$$\sqrt{2} \leq 4 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{L} = [-2, 2]$$