

A10

A10 Wurzelungleichung

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Ungleichungen.

- $\sqrt{x^2 + 9} + x \leq 5, x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6} \leq 4, x \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x+2} + x \leq 4, x \in \mathbb{R}$

$$\text{a) } \sqrt{x^2 + 9} + x \leq 5$$

$$\sqrt{x^2 + 9} \leq 5 - x$$

Wir betrachten die beiden Seiten als Funktionen und berechnen den Schnittpunkt

$$\sqrt{x^2 + 9} = 5 - x \quad | \quad (\cdot)^2$$

$$x^2 + 9 = 25 - 10x + x^2$$

$$10x = 16$$

$$x = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$$

$$\text{Punktprobe bei } 0: 3 \leq 5 \Rightarrow \mathcal{U} = (-\infty, \frac{8}{5}]$$

$$\text{b) } \sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6} \leq 4 \quad \text{für } x \geq 0$$

$$\sqrt{x^2 + 6x} = 4 \quad | \quad (\cdot)^2$$

$$x^2 + 6x = 16$$

$$x^2 + 6x - 16 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 64}}{2} = \frac{-6 \pm 10}{2}$$

$$x_1 = -8, x_2 = 2$$

Nur $x=2$ kommt als Schnittpunkt in Frage

Punktprobe bei $x=0$:

$$\text{Probe: } \sqrt{4+12} = 4 \quad \checkmark$$

$$\mathcal{U} = [0, 2]$$

$$\text{c) } \sqrt{x+2} \leq 4 - x \quad \text{für } x \geq -2$$

$$\sqrt{x+2} = 4 - x \quad | \quad (\cdot)^2$$

$$x+2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x+2 = 16 - 8x + x^2$$

$$x^2 - 9x - 14 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2} = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = 7, \quad x_2 = 2$$

Probe: $\sqrt{9} = 4 - 7 = -3 \quad \times$

$\sqrt{4} = 4 - 2 = 2 \quad \checkmark$

nur bei $x=2$ liegt ein Schnittpunkt vor. Punktprobe bei $x=0$:

$$\sqrt{2} \leq 4 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{L} = [-2, 2]$$