Aufgaben der Zertifikatsklausuren

A2021
In dieser Aufgabe werden Polynomfunktionen 3. Grades der Form
$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (*)$
betrachtet. Die reellen Konstanten a, b, c heißen Koeffizienten.
a. Gegeben sind $x_1 = 1, x_2 = -1$ und $x_3 = 3$. Konstruieren Sie die Polynomfunktion 3. Grades der Form (*), welche die Nullstellen x_1, x_2, x_3 besitzt.
b. Gegeben sind drei (nicht notwendig verschiedene) reelle Zahlen x_1, x_2, x_3. Konstruieren Sie die Polynomfunktion 3. Grades der Form (*), welche die Nullstellen x_1, x_2, x_3 besitzt. Geben Sie jeweils eine Formel an, mit der a bzw. b bzw. c aus den Nullstellenx_1, x_2, x_3 berechnet werden kann.
c. Gegeben ist eine Polynomfunktion p der Form (*) mit ganzzahligen Koeffzienten a, b, c. Außerdem ist bekannt, dass $x = 2$ eine Nullstelle von p ist. Beweisen Sie, dass dann der Koeffzient c durch 2 teilbar ist.
Hinweis: Eine ganze Zahl d ist durch 2 teilbar, wenn es eine ganze Zahl k gibt, so dass $d = 2k$.

A2020
Gegeben sind die Funktionen f und h mit $f(x) = (x+4)^2$ und $h(x) = \frac{1}{5}(x^2-4)$ für $x \in \mathbb{R}$.
a) Berechnen Sie die Nullstellen von f und h und die Schnittpunkte der Graphen von f und h.
b) Skizzieren Sie die Graphen $y = f(x)$ und $y = h(x)$, ihre Schnittpunkte und die Nullstellen von f und h in einem geeigneten Koordinatensystem.
c) Bestimmend Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\frac{1}{5}(x^2 - 4) \leq (x + 4)^2$.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\sqrt{\frac{1}{5}(x^2 - 4)} \leq x + 4$.

A2019
a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{4x - 5}{(x + 1)(x - 2)} \leq 0$.
b) Bestimmen Sie reelle Zahlen A, B, so dass
$\dfrac{4x - 5}{(x + 1)(x - 2)} = \dfrac{A}{x + 1} + \dfrac{B}{x - 2}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ erfüllt ist.
c) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit
$f(x) = \dfrac{4x - 5}{(x + 1)(x - 2)}$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$
unter Berücksichtigung der Nullstellen, des Monotonieverhaltens und der Asymptoten.

A2018
a) Beweisen Sie, dass die Polynomfunktion $p(x) = 6x^2 - 12x + 7$ für alle reellen Werte von x positive Werte annimmt.
b) Gegeben sind die zwei Gleichungen
$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 3x - 2 \quad (1)$
$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} = 2 - 3x \quad (2)$
Untersuchen Sie beide Gleichungen auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.
c) Bestimmen Sie, für welche reellen Zahlen x die Ungleichung
$\sqrt{6x^2 - 12x + 7} \leq 3x - 2$ erfüllt ist.

A2017
Gegeben ist das Polynom $p(x) = x^3 - x^2 - 2x + 8$ mit $x \in \mathbb{R}$.
a) Zeigen Sie, dass p die Nullstelle $x = -2$ besitzt.
b) Beweisen Sie, dass p keine weitere reelle Nullstelle besitzt.
c) Bestimmen Sie alle drei x-Werte, für die $p(x)$ den Wert 8 annimmt.
d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $p(x) \leq 8, x \in \mathbb{R}$.

A2016
a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f mit $f(x) = |x + 5| - |x + 2|$ für $x \in \mathbb{R}$.
b) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen der Gleichung $|x + 5| - |x + 2| = x + 3$.
c) Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Ungleichung $|x + 5| - |x + 2| \leq x + 3$.

Sonstige Aufgaben

A1 Nullstellen
Berechnen Sie die reellen Nullstellen folgender Polynome ohne Taschenrechner:
a) $p(x) = x^4 + 2x^3 + x^2$
b) $p(x) = x^2 - 2x - 15$

A2 Polynomdivision
Führen Sie die angegebenen Polynomdivisionen durch.
a) $(2x^3 + 4x^2 - 2x - 4) : (x - 1)$
b) $(x^3 - x^2 + 3x - 3) : (x - 2)$

A3 Polynomdivision
Faktorisieren Sie folgende Polynome in Linearfaktoren:
a) $p(x) = x^3 + 3x^2 - 4x - 12, x \in \mathbb{R}$
b) $p(x) = x^3 + x^2 - 2x - 2, x \in \mathbb{R}$
c) $p(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1, x \in \mathbb{R}$

A4 Polynomdivision
Begründen Sie, warum sich das Polynom $p(x) = x^2 + 1$ nicht in reelle Linearfaktoren zerlegen lässt.

A5 Ungleichungen
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Gleichung oder Ungleichung für reelle x.
a) $|x - 5| = |x| + 2$
b) $(6x - 5)(x + 1)(x - 2) \geq 0$
c) $\dfrac{x}{x-2} \geq \dfrac{3}{(x-2)^2}$
d) $\dfrac{2}{x-1} > \dfrac{1}{x}$
e) $|x - 2| + |4 - x| \leq x + 1$
f) $\dfrac{x+1}{x-1} > 2$

A6 Ungleichungen
Lösen Sie die Ungleichungen und stellen Sie die Lösungsmenge graphisch in einem Koordinatensystem dar.
a) $|x| + 2|y| \geq 4$
b) $|x - 2| + 2|y + 1| \geq 4$

A7 Wurzelgleichung
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der angegebenen Gleichungen.
a) $\sqrt{x+2} + x = 4, x \in \mathbb{R}$
b) $\sqrt{x+2} = 10, x \in \mathbb{R}$
c) $\sqrt[3]{x-1} + 10 = 12, x \in \mathbb{R}$

A8 Wurzelgleichung
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der angegebenen Wurzelgleichungen.
a) $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+7} = 1, x \in \mathbb{R}$
b) $\sqrt{x+30} = 6 \cdot \sqrt{x-5}, x \in \mathbb{R}$
c) $\sqrt{x} = \sqrt{x+8} - 2, x \in \mathbb{R}$

A9 Wurzelgleichung
Gegeben ist die Gleichung $\sqrt{x-6} + \sqrt{x+2} = 2, x \in \mathbb{R}$
Bestimmen Sie die Lösungsmenge.

A10 Wurzelungleichung
Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der angegebenen Ungleichungen.
a) $\sqrt{x^2+9} + x \leq 5, x \in \mathbb{R}$
b) $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+6} \leq 4, x \in \mathbb{R}$
c) $\sqrt{x+2} + x \leq 4, x \in \mathbb{R}$