A1

a) $a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad a_4 = \frac{3}{5}, \quad a_5 = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \quad a_6 = \frac{5}{7}$

b) $a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 5, \quad a_4 = 9, \quad a_5 = 9, \quad a_6 = 13, \quad a_7 = 13, \quad a_8 = 17$

c) $a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 14, \quad a_4 = 30, \quad a_5 = 55$

d) $a_0 = 4, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 4, \quad a_3 = 3, \quad a_4 = 4, \quad a_5 = 3, \quad a_6 = 4, \quad a_7 = 3$

A2

a) $a_n = 2 + 4 \cdot n \qquad n \in \mathbb{N}$

b) $a_n = n^2 + 1 \qquad n \in \mathbb{N}$

c) $a_n = \frac{n-1}{n} \qquad n \in \mathbb{N}$

d) $a_n = (-2)^{n-1} \qquad n \in \mathbb{N}$

A3

a) $$a_n = \begin{cases} 0 & \text{für } n = 1 \\ a_{n-1} + (n-1) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

b) $2, 2, 3, 7, 16, 32, 57$

$\quad\ 0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25$

$$a_n = \begin{cases} 2 & \text{für } n = 1 \\ a_{n-1} + (n-2)^2 & \text{sonst} \end{cases}$$

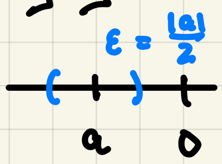
A4

Exponenten < 5

a) $$\frac{(n-1)(n+2)}{2n-2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + 5}{3n^4 + 2n^3 + n^2 + 2} = \frac{2n^5 + \dots}{6n^5 + \dots} = \frac{2 + \dots}{6 + \dots} = \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{3}$$

Erweitern mit $\frac{1}{n^5}$

b) Annahme: $a < 0$. Setze $\varepsilon = \frac{|a|}{2}$. Dann gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass ab n_0 alle Folgenglieder in der ε-Umgebung von a liegen. Diese wären alle negativ. ↯



A5 a) $\frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{1}{2+\frac{5}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$

Erweitern mit $\frac{1}{n^2}$

b) „a_n konvergiert gegen a" $\Leftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n>n_0: |a-a_n| < \varepsilon$

c) Sei $\varepsilon > 0$ $\quad \left|\frac{n^2}{2n^2+5} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} - \frac{n^2}{2n^2+5} = \frac{2n^2+5-2n^2}{4n^2+10} = \frac{5}{4n^2+10} < \varepsilon$

$\Uparrow\ \frac{5}{\varepsilon} < 4n^2+10$

$\Uparrow\ \frac{5}{\varepsilon} < 4n^2$

$\Uparrow\ \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}} < n$

Setze $n_0 = \left\lceil \sqrt{\frac{5}{4\varepsilon}} \right\rceil$. Dann gilt:

Aufrundungsklammern

$|a_n - \frac{1}{2}| < \varepsilon$ für $n > n_0$.

A6 a) $\frac{2n+1}{n+3} \to \frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$

Terme mit kleineren Exponenten

$\frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2} = \frac{4n^2+\dots}{4n^2+\dots} = \frac{4+\dots}{4+\dots} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$\left.\right\} a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 3$

b) $(-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-2} = (-1)^n \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{2}{n^2}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

c) $\frac{1+2+\dots+n}{n^2} = \frac{\frac{1}{2}(n+1)(n)}{n^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{2}$ (Die Erweiterung mit $\frac{1}{n^2}$ wurde hier nicht mehr explizit hingeschrieben.)

d) $(-1)^n \frac{n^2-1}{n^2+1} = (-1)^n \cdot \frac{1-\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}$ divergiert. Die Terme sind abwechselnd nahe bei der 1, dann nahe bei -1.

e) $\frac{2^n-3^n}{2^n+3^n} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$

Erweitern mit $\frac{1}{3^n}$

A7 a) $\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n} = \frac{3+2n-2n}{\sqrt{3+2n}+\sqrt{2n}} = \frac{3}{\sqrt{3+2n}+\sqrt{2n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

3. Binom. Formel

b) $\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n} = \frac{n^2+4n-(n^2+n)}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+4n}+\sqrt{n^2+4}} = \frac{3}{\sqrt{1+\frac{4}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{2}$

Erweitern mit $\frac{1}{n}$