A2021

Es sei (a_n) eine Zahlenfolge.

a. Geben Sie die Definition dafür an, dass $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ gilt.

b. Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen Null konvergiert. Beweisen Sie durch Anwendung der Definition aus a., dass die Folge (b_n) mit $b_n = \dfrac{n}{n^2+1}$ eine Nullfolge ist.

c. Beweisen Sie ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen: Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.

d. Geben Sie Beispielfolgen a_n, b_n an, die keine Nullfolgen sind, und deren Summenfolge eine Nullfolge bildet.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a - a_n| < \varepsilon$

b) Es ist zu zeigen:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : \left| \dfrac{n}{n^2+1} - 0 \right| < \varepsilon \qquad (*)$

$\Updownarrow$

Aufrunden

$\dfrac{n}{n^2+1} < \varepsilon \Leftarrow \dfrac{n}{n^2} < \varepsilon \iff \dfrac{1}{n} < \varepsilon$

Setze $n_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$. Dann gilt Aussage $(*)$.

c) Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es nach Voraussetzung n_0, n_1 mit:

$|a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_1$ und $|b_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_2$

Setze $n_0 := \max(n_1, n_2)$. Dann gilt.

$|a_n + b_n| \le |a_n| + |b_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Also ist $(a_n + b_n)$ Nullfolge.

Dreiecksungleichung

d) $(a_n) = 1, \quad (b_n) = -1$

(a_n) und (b_n) sind keine Nullfolgen. Aber $(a_n + b_n)$ ist Nullfolge.