A2020

A2020

Gegeben seien reelle Folgen (a_n), (b_n) und reelle Zahlen a, b.

a. Geben Sie die Definition dafür an, dass (a_n) gegen a konvergiert.

b. Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n), so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$

b1. Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$ wenn (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert?

b2. Beweisen Sie den Satz.

b3. Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.

c. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n^2 \cdot 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}$$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ |a - a_n| < \varepsilon$

b1) Grenzwert ist $a + b$

b2) Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Zu zeigen:

$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n > n_0 : \ |(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon$

Nach Voraussetzung existieren n_1, n_2 mit

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_1$

$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_2$

Setze $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Dann gilt:

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für $n > n_0$

b3) Die Umkehrung des Satzes lautet: Konvergiert die Summenfolge $(a_n + b_n)$, so konvergieren auch die Einzelfolgen a_n und b_n. Dieser Satz ist falsch.
Gegenbeispiel:

$a_n = n \qquad b_n = -n$

$\lim\limits_{n \to \infty} (a_n + b_n) = 0$, aber a_n und b_n konvergieren nicht.

c) $$\frac{n^2 \cdot 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n} = \frac{\frac{n^2}{2^n} + 1 + \frac{(-1)^n}{4^n}}{\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1} \longrightarrow -1 \text{ für } n \to \infty$$

Erweitern mit $\frac{1}{4^n}$

$\to 0$ $\to 0$ $\to 0$