A2019

A2019

a. Gegeben sind eine reelle Folge (a_n) und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$

a1. Geben Sie die Definition der Konvergenz $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

a2. Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge (a_n) konvergent, so ist sie beschränkt.

a3. Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a2 und zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist.

b. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge: (b_n) mit $b_n = \sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

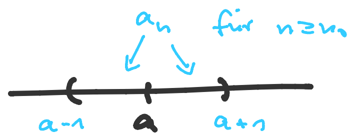
a1) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$$

a2) Sei a der Grenzwert der Folge. Setze $\varepsilon = 1$.

Nach Voraussetzung gibt es n_0 mit: $|a - a_n| < 1$ für $n > n_0$.

Alle a_n mit $n > n_0$ sind also in einer 1-Umgebung von a



, d.h. es gilt $|a_n| < |a| + 1$

(oder Herleitung über Dreiecksungleichung

$|a_n| = |a_n - a + a| \le |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$)

Es liegen höchstens noch endlich viele a_n außerhalb des Intervalls. Davon sei a' das Element mit dem maximalen Betrag. Setze $S = \max(|a'|, 1 + |a|)$. Dann gilt

$|a_n| \le S$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a3)

Die Umkehrung des Satzes lautet: Ist eine Folge (a_n) beschränkt, so konvergiert sie. Dies ist falsch. Gegenbeispiel:

$a_n = (-1)^n$ ist beschränkt und konvergiert nicht.

b) $$\sqrt{n^2+2n} - \sqrt{n^2-n} = \frac{(n^2+2n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{3n}{\sqrt{n^2+2n} + \sqrt{n^2-n}}$$

Erweiterung für 3. binomische Formel

$$= \frac{3}{\sqrt{1+\frac{2}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \to \frac{3}{2}$$

für $n \to \infty$

3. binomische Formel $$= \frac{}{\sqrt{1+\underbrace{\tfrac{2}{n}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\tfrac{1}{n}}_{\to 0}}} \longrightarrow \frac{}{2} \quad \text{für } n\to\infty$$