A2017

A2017
Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder $a_n, (n \in \mathbb{N})$ besitzt.
a. Es sei (a_n) eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von (a_n) geben a an.
b. Beweisen Sie, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.
c. Sei (b_n) eine Folge mit $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (b_n) geben 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.

d. Sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie weiter die Folge (d_n) definiert durch $d_1 = \frac{1}{2}, d_{n+1} = c_n \cdot d_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folgen (d_n) gegen Null konvergiert.
Hinweis: Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

b) Sei $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \frac{1}{2^n} < \varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} < 2^n$$

$$\ln \frac{1}{\varepsilon} < n \cdot \ln 2$$

$$\frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} < n$$

Setze $n_0 = \left\lceil \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\ln 2} \right\rceil$, dann gilt: $\left|\frac{1}{2^n}\right| < \varepsilon$ für $n > n_0$ ✓

aufgerundete ganze Zahl

c) Sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $n_0 \in \mathbb{N}$:

$|b_n - 0| = |b_n| \leq \frac{1}{2^n} < \varepsilon$ für $n > n_0$ nach b)

d) Nach c) reicht es zu zeigen:

$|d_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

Bew. durch vollständige Induktion

I.A.: $|d_1| = \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2^1}$ ✓

I.S.: $|d_{n+1}| = |c_n \cdot d_n| = |c_n| \cdot |d_n| \underset{\text{I.V.}}{\leq} |c_n| \cdot \frac{1}{2^n}$

$\leq \frac{1}{\;} \cdot \frac{1}{\;} = \frac{1}{\;}.$ ✓

I.V.

$$\leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}} \qquad \checkmark.$$

Vor. c_n