A2016

A2016

Gegeben sei eine reelle Folge (a_n) und eine reelle Zahl a.

a. Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a$

b.Weise Sie nach, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.

c. Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist (a_n) konvergent gegen a, dann konvergiert auch (b_n) gegen a.

d. Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n)$$

a) $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n > n_0 : |a_n - a| < \varepsilon$

b) Sei $\varepsilon > 0$. $\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$

$\frac{1}{\varepsilon} < n$

Setze $n_0 = \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$. Dann gilt: $\frac{1}{n} < \varepsilon$ für $n > n_0$.

c) Sei $\varepsilon > 0$. $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n} \quad | -a_n$

$0 \leq b_n - a_n \leq \frac{1}{n} \qquad (*)$

$$|b_n - a| = |b_n - a_n + a_n - a| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\leq} |b_n - a_n| + |a_n - a|$$

$|b_n - a_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ ab einem n_1 wg. $(*)$

$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ ab einem n_2 nach Vor.

Setze $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Dann gilt:

$|b_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $n > n$ q.e.d.

d) $$\underbrace{\frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 (2n-1)^2}}_{\text{mit } \frac{1}{n^4} \text{ erweitern}} + \underbrace{\frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n)}_{\to 0} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

für $n \to \infty$

mit $\frac{1}{n^4}$ erweitern

$$=$$

$$\frac{1 - \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{n^4}}_{\to 0}}{\frac{n^2 \cdot 4n^2}{n^4} + \underbrace{\ldots\ldots}_{\to 0}}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{4}$$

$$\downarrow$$

$$0$$