

Folgen, Grenzwerte**A2021**

Es sei (a_n) eine Zahlenfolge.

- a. Geben Sie die Definition dafür an, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ gilt.
- b. Eine Folge heißt Nullfolge, wenn sie gegen Null konvergiert. Beweisen Sie durch Anwendung der Definition aus a., dass die Folge (b_n) mit $b_n = \frac{n}{n^2 + 1}$ eine Nullfolge ist.
- c. Beweisen Sie ohne die Verwendung von Grenzwertsätzen: Sind (a_n) und (b_n) Nullfolgen, dann ist auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$ eine Nullfolge.
- d. Geben Sie Beispielfolgen a_n, b_n an, die keine Nullfolgen sind, und deren Summenfolge eine Nullfolge bildet.

A2020

Gegeben seien reelle Folgen $(a_n), (b_n)$ und reelle Zahlen a, b .

- a. Geben Sie die Definition dafür an, dass (a_n) gegen a konvergiert.
- b. Gegeben ist der Satz: Konvergieren die Folgen (a_n) und (b_n) , so konvergiert auch die Summenfolge $(a_n + b_n)$
- b1. Wie lautet der Grenzwert der Folge $(a_n + b_n)$ wenn (a_n) gegen a und (b_n) gegen b konvergiert?
- b2. Beweisen Sie den Satz.
- b3. Formulieren Sie die Umkehrung des Satzes und zeigen Sie, dass diese falsch ist.
- c. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge (a_n) mit

$$a_n = \frac{n^2 \cdot 2^n + 4^n + (-1)^n}{3^n - 4^n}$$

A2019

- a. Gegeben sind eine reelle Folge (a_n) und eine Zahl $a \in \mathbb{R}$
- a1. Geben Sie die Definition der Konvergenz $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
- a2. Beweisen Sie den folgenden Satz: Ist die Folge (a_n) konvergent, so ist sie beschränkt.
- a3. Bilden Sie die Umkehrung des Satzes aus a2 und zeigen Sie, dass die Aussage falsch ist.
- b. Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge: (b_n) mit $b_n = \sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 - n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$

A2018

- a. Gegeben Sie in jeder Teilaufgabe ein Beispiel an für Folgen, die die angegebenen Aussagen erfüllen:
- a1. (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
- a2. (a_n) ist konvergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent
- a3. (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist divergent
- a4. (a_n) ist divergent und (b_n) ist divergent und $(a_n * b_n)$ ist konvergent

- b. Es seien $(a_n), (b_n)$ konvergente reelle Folgen mit $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ und $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Was kann man über die Folge $(a_n * b_n)$ aussagen? (Ohne Beweis!)
- c. Es seien (a_n) eine gegen a konvergente Folge. Beweisen Sie durch Induktion bezüglich m , dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: Die Folgen (a_n^m) konvergiert gegen a^m . *Hinweis:* Verwenden Sie die Aussage aus Teil b.

A2017

Mit (a_n) wird eine Folge bezeichnet, die die Folgenglieder $a_n, (n \in \mathbb{N})$ besitzt.

- a. Es sei (a_n) eine reelle Folge und a eine reelle Zahl. Geben Sie die Definition der Konvergenz von (a_n) geben a an.
- b. Beweisen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Weisen Sie dazu nach, dass die Definition der Konvergenz erfüllt ist.
- c. Sei (b_n) eine Folge mit $|b_n| \leq \frac{1}{2^n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (b_n) gegen 0 konvergiert. Weisen Sie dazu nach, dass die Konvergenzdefinition erfüllt ist.
- d. Sei (c_n) eine Folge mit $|c_n| \leq \frac{1}{2}$ für $n \in \mathbb{N}$. Sie weiter die Folge (d_n) definiert durch $d_1 = \frac{1}{2}, d_{n+1} = c_n \cdot d_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folgen (d_n) gegen Null konvergiert. *Hinweis:* Sie dürfen in jedem Aufgabenteil die Resultate der davorliegenden Aufgabenteile verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

A2016

Gegeben sei eine reelle Folge (a_n) und eine reelle Zahl a .

- a. Geben Sie die Definition dafür an, dass die Folge (a_n) gegen a konvergiert, also $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$
- b. Weisen Sie nach, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt.
- c. Es seien $(a_n), (b_n)$ Folgen und es gelte $a_n \leq b_n \leq a_n + \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie: Ist (a_n) konvergent gegen a , dann konvergiert auch (b_n) gegen a .
- d. Bestimmen Sie durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen unter Zuhilfenahme von Teil c) den Grenzwert der Folge (b_n) mit

$$b_n := \frac{n^4 - n^2 + 5}{(n+3)^2 \cdot (2n-1)^2} + \frac{1 + (-1)^n}{2n} \cdot \sin^2(n)$$

Sonstige Aufgaben**A1**

Bestimme die Folgenglieder bis zur angegebenen Nummer n .

- a) $a_n = \frac{n-1}{n+1}, n=6$ b) $a_n = (2n + (-1)^n), n=8$
 c) $a_0 = 0$ und $a_{n+1} = a_n + n^2, n=5$ d) $a_0 = 4$ und $a_{n+1} = a_n + (-1)^n, n=7$

A2

Bestimme explizit eine Folge, deren erste Folgenglieder mit der angegebenen Zahlenfolge übereinstimmen.

- a) 2, 6, 10, 14, 18 b) 2, 5, 10, 17, 26
 c) $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ d) 1, -2, 4, -8, 16

A3

Bestimme rekursiv eine Folge, deren erste Folgenglieder mit der angegebenen Zahlenfolge übereinstimmen.

- a) 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
 b) 2, 2, 3, 7, 16, 32, 57, 93, ...

A4

a. Untersuchen Sie die nachstehend gegebene Folge auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert durch Anwendung der Sätze über konvergente Folgen.

$$a_n = \frac{(n-1)(n+1)}{2n-2} \cdot \frac{2n^3 + 3n^2 + 5}{3n^4 + 2n^3 + n^2 + 2}$$

- b. Gegeben sei eine konvergente Folge a_n mit $a_n \in \mathbb{R}, a_n \geq 0$. Zeigen Sie, dass für den Grenzwert $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ die Ungleichung $a \geq 0$ gilt. *Hinweis:* Sie können beispielsweise die Annahme $a < 0$ zum Widerspruch führen.

A5

Gegeben ist die Folge $a_n = \frac{n^2}{2n^2 + 5}$.

- a) Bestimmen Sie den Grenzwert.
 b) Geben Sie die Definition der Aussage „ a_n konvergiert gegen a “ an.
 c) Beweisen Sie für die oben angegebene Folge a_n und den von Ihnen gefundenen Grenzwert a , dass die Definition von „ a_n konvergiert gegen a “ erfüllt ist.

A6

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihre Grenzwerte.

- a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3} + \frac{4n^2+3n+1}{(2n+1)^2}$
 b) $a_n = (-1)^n \cdot \frac{n+1}{n^2-2} \quad (n \geq 2)$

$$\text{c) } a_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$$

$$\text{d) } a_n = (-1)^n \cdot \frac{n^2-1}{n^2+1}$$

$$\text{e) } a_n = \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n}$$

A7

Berechnen Sie folgende Grenzwerte

$$\text{a) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3+2n} - \sqrt{2n})$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n} - \sqrt{n^2+n})$$