A1 a)

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$

Behauptung: n hat gerade Anzahl von Teilern

Die Aussage ist falsch.

Gegenbeispiel: $n = 4$ hat die Teiler $1, 2, 4$

b) Voraussetzung: $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und n_1, n_2 ungerade

Behauptung: $n_1 \cdot n_2$ ist ungerade

Beweis: Da n_1, n_2 ungerade, lassen sie sich darstellen als $n_1 = 2k_1 + 1$, $n_2 = 2k_2 + 1$ für geeignete $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$. Dann ist $n_1 \cdot n_2 = (2k_1+1)(2k_2+1) = 4k_1k_2 + 2k_1 + 2k_2 + 1$ $= 2(2k_1k_2 + k_1 + k_2) + 1$. Das ist eine ungerade Zahl □

c) Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$ und n ungerade

Behauptung: n^3 ist ungerade

Beweis: Wenn n ungerade, dann ist $n \cdot n = n^2$ ungerade wg. b). Dann ist aber auch $n^2 \cdot n = n^3$ wg. b) ungerade. □

d) Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$, $n^2 + 6n + 4$ ist ungerade.

Behauptung: n ist ungerade

Kontraposition: $((a \wedge b) \Rightarrow c) \Leftrightarrow ((a \wedge \neg c) \Rightarrow \neg b)$

Voraussetzung: $n \in \mathbb{N}$ und n ist gerade.

Behauptung: $n^2 + 6n + 4$ ist gerade.

Beweis: Wenn n gerade, dann läßt es sich darstellen als $n = 2k$ mit geeigneten $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$n^2 + 6n + 4 = 4k^2 + 12k + 4 = 2(k^2 + 6k + 2)$. Dies ist eine gerade Zahl. □

A2

Voraussetzung: a rational, b reell, b nicht rational

Behauptung: $a \cdot b$ nicht rational

Kontraposition

Voraussetzung: a rational, b reell, $a \cdot b$ rational

Behauptung: b rational

Beweis: Da a und $a \cdot b$ rational, gibt es Darstellungen

$$a = \frac{z_1}{n_1} \quad \text{und} \quad a \cdot b = \frac{z_2}{n_2} \quad \text{mit } z_1, z_2, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

Dann gilt: $\frac{z_1}{n_1} \cdot b = \frac{z_2}{n_2}$, also $b = \frac{z_2 \cdot n_1}{n_2 \cdot z_1}$. Da $z_2 \cdot n_1, n_2 \cdot z_1 \in \mathbb{Z}$ ist b rational □

A3

a) Behauptung: $\sqrt{3}$ ist irrational.

Beweis (indirekt): Annahme $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$. Dann kann man $\sqrt{3}$ darstellen als vollständig gekürzten Bruch $\sqrt{3} = \frac{p}{q}$. Dann gilt: $3 \cdot q^2 = p^2$. Also ist p^2 durch 3 teilbar. Dann ist also auch p durch 3 teilbar, denn die Primfaktorzerlegung von p^2 besteht aus der verdoppelten Primfaktorzerlegung von p. Also gilt $p = 3k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Damit ergibt sich: $3q^2 = p^2 = 9k^2$. Also $q^2 = 3k^2$. Damit ist q^2 durch 3 teilbar und also auch q. p und q sind also beide durch 3 teilbar, also ist $\frac{p}{q}$ nicht vollständig gekürzt, ein Widerspruch zur Annahme. $\square$.

b) Sei $x \in \mathbb{Q}$. Dann gibt es $p, q \in \mathbb{Z}$ mit $x = \frac{p}{q}$.

Annahme: $\sqrt{2} + x \in \mathbb{Q}$. Dann gilt $\sqrt{2} + x = \frac{a}{b}$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$.

Dann gilt: $\sqrt{2} = \frac{a}{b} - x = \frac{a}{b} - \frac{p}{q} = \frac{aq - bp}{b \cdot q}$. Dies ist eine rationale Zahl, da $aq - bp,\ bq \in \mathbb{Z}$. Dies ist ein Widerspruch zu der bekannten Tatsache, dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

A4

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2$

IA: (Induktionsanfang) $n = 1$: $1 = \frac{1}{6} \cdot 1(1+1)(2 \cdot 1 + 1) = \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 = 1$ ✓

IS: (Induktionsschritt) Wir müssen zeigen:

$$1 + 4 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{1}{6} \cdot (n+1) \cdot ((n+1)+1)(2(n+1)+1) \quad (*)$$

Die linke Seite formen wir mit der Induktionsvoraussetzung (IV) um.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \ldots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) + (n+1)^2 \\ &= \frac{1}{6}(n+1)\left(n(2n+1) + 6(n+1)\right) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + n + 6n + 6) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \end{aligned}$$

Die rechte Seite von $(*)$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{6}(n+1)((n+2)(2(n+1)+1)) \\ =\ & \frac{1}{6}(n+1)((n+2)(2n+3)) \\ =\ & \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 3n + 4n + 6) \\ =\ & \frac{1}{6}(n+1)(2n^2 + 7n + 6) \end{aligned}$$

Damit ist Gleichung $(*)$ gezeigt. $\square$

A4

b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

IA, $n=1$: $1 = \frac{1}{4} 1^2 (1+1)^2 = 1$ ✓

IS: zu zeigen ist: $1+8+27+..+n^3+(n+1)^3 = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2$ (*)

linke Seite von (*): $1+8+..+n^3+(n+1)^3 \underset{IV.}{=} \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2 + (n+1)^3$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2 + 4(n+1))$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2 (n^2+4n+4)$$

Rechte Seite von (*): $\frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)+1)^2 = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+1)^2+2(n+1)+1)$

$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+2n+1+2n+2+1)$$
$$= \frac{1}{4}(n+1)^2(n^2+4n+4)$$

Damit Gleichung (*) gezeigt. □

c) $\sum_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

IA ($n=1$): $2 = 1\cdot(1+1) = 2$ ✓

IS: zu zeigen ist: $2+4+..+2n+2(n+1) = (n+1)((n+1)+1)$ (*)

linke Seite von (*): $2+4+..+2n+2(n+1) \underset{IV}{=} n(n+1)+2(n+1)$

$$= (n+1)(n+2)$$

= rechte Seite von (*) □

d) 5 ist Teiler von $6^n - 1$

IA: ($n=1$) 5 ist Teiler von $6^1 - 1 = 5$ ✓

IS: Wir müssen zeigen: 5 ist Teiler von $6^{n+1} - 1$

Nach IA ist 5 Teiler von $6 - 1$, also gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit:

$$6^n - 1 = 5\cdot k_1 \quad |\cdot 6$$
$$6^{n+1} - 6 = 5\cdot 6\cdot k_1 \quad |+5$$
$$6^{n+1} - 1 = 5\cdot 6\cdot k_1 + 5 = 5\cdot(6k_1+1)$$

Also ist 5 auch ein Teiler von $6^{n+1} - 1$ □

e) 6 ist Teiler von n^3-n

IA: $(n=1)$ 6 ist Teiler von $1-1=0$ ✓

IS: Wir müssen zeigen: 6 ist Teiler von $(n+1)^3-(n+1)$

$$(n+1)^3-(n+1) = n^3+3n^2+3n+1-(n+1)$$
$$= n^3+3n^2+2n$$

Nach IV ist 6 Teiler von n^3-n, also gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit:

$$6k = n^3-n \quad | +3n^2+3n$$
$$6k+3n^2+3n = n^3+3n^2+2n \quad (*)$$

Fall 1: n gerade, d.h. $n=2k_1$ für ein $k_1 \in \mathbb{N}$.

Für die linke Seite von $(*)$ ergibt sich dann:

$$6k+3\cdot 4k_1^2+3\cdot 2k_1 = 6(k+2k_1^2+k_1) = n^3+3n^2+2n$$

Dieser Term ist durch 6 teilbar.

Fall 2: n ungerade, d.h. $n=2k_2+1$ für ein $k_2 \in \mathbb{N}$.

Für die linke Seite von $(*)$ ergibt sich dann:

$$6k+3(2k_2+1)^2+3(2k_2+1)$$
$$= 6k+3(4k_2^2+2k_2+1)+6k_2+3$$
$$= 6k+12k_2^2+6k_2+3+6k_2+3$$
$$= 6k+12k_2^2+12k_2+6 = 6(k+2k_2^2+2k_2+1)$$

Dieser Term ist durch 6 teilbar.

f) $2^n > n$

IA $(n=1)$: $2^1 = 2 > 1$ ✓

IS: zu zeigen: $2^{n+1} > n+1$.

Nach IV dürfen wir annehmen: $2^n > n$

$$2^n > n \quad | \cdot 2$$
$$2^{n+1} > 2n = n+n \geq n+1$$

Also: $2^{n+1} > n+1$ $\square$

g) $n^2 > 2n+1$ falls $n \geq 3$

IA $(n=3)$: $3^2 = 9 > 2\cdot 3+1 = 7$ ✓

IS: zu zeigen: $(n+1)^2 > 2(n+1)+1 = 2n+3$

$$(n+1)^2 = n^2+2n+1 \underset{\text{IV.}}{>} (2n+1)+(2n+1)$$
$$= 4n+2 = 2n + \underbrace{2n+2}_{>3,\ \text{da}\ n\geq 3} > 2n+3$$

$\square$