A2021

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass
$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)=(n+1)^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.

b) Es seien a,b reelle Zahlen. Beweisen Sie: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt
$(a-b)\cdot\sum_{j=0}^{n}a^jb^{n-j}=a^{n+1}-b^{n+1}$.

a) IA $(n=1)$ $\quad \sum_{j=0}^{1} 2j+1 = 1+3 = (1+1)^2$ ✓

IS: zu zeigen: $1+3+\ldots+(2n+1)+2(n+1)+1 = ((n+1)+1)^2 \quad (*)$

Nach IV gilt: $1+3+\ldots+(2n+1)+2(n+1)+1$

$$= (n+1)^2+2(n+1)+1$$

$$\underset{\text{1. Binom. Formel}}{=} ((n+1)+1)^2 \quad \square$$

b) $(a-b)\cdot\sum_{j=0}^{n}a^jb^{n-j} = a^{n+1}-b^{n+1}$

IA $(n=1)$: $\quad (a-b)\cdot\sum_{j=0}^{1}a^jb^{1-j} = (a-b)\cdot(a^0b^1+a^1b^0)$

$$= (a-b)\cdot(b+a) = a^2-b^2 \quad ✓$$

IS: zu zeigen: $(a-b)\cdot\sum_{j=0}^{n+1}a^jb^{n+1-j} = a^{n+2}-b^{n+2}$

$$(a-b)\sum_{j=0}^{n+1}a^jb^{n+1-j} = (a-b)\left(b^{n+1}+ab^n+a^2b^{n-1}+\ldots a^nb+a^{n+1}\right)$$

$$= (a-b)\left(b(b^n+ab^{n-1}+a^2b^{n-2}+\ldots+a^n)+a^{n+1}\right)$$

$$= b\cdot(a-b)(b^n+ab^{n-1}+\ldots+a^n)+(a-b)a^{n+1}$$

$$\underset{IV}{=} b(a^{n+1}-b^{n+1})+a^{n+2}-ba^{n+1}$$

$$= ba^{n+1}-b^{n+2}+a^{n+2}-ba^{n+1} = a^{n+2}-b^{n+2} \quad \square$$