A2020

A2020

Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft

(*) $\quad f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$ für alle $x, y > 0$.

a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $f(2^n) = n \cdot f(2)$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

b) Beweisen Sie, dass $f(1) = 0$ gilt.

c) Beweisen Sie, dass $f(\frac{1}{x}) = -f(x)$ für alle $x > 0$ gilt.

Hinweise: Setzen Sie geeignete Werte für x, y in (*) ein. Im Aufgabenteil c) darf das Ergebnis aus b) verwendet werden, auch wenn Teil b) nicht gelöst wurde.

a) I.A: $\quad f(2^1) = 1 \cdot f(2) \quad \checkmark$

I.S: $\quad f(2^{n+1}) = f(2^n \cdot 2) \underset{(*)}{=} f(2^n) + f(2) \underset{\text{I.V.}}{=} n \cdot f(2) + f(2)$

$= (n+1) f(2) \quad \checkmark$

b) $\quad f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

c) $\quad 0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) \underset{(*)}{=} f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$