A2019

A2019

Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $p_n(x) = 1 - x^{2^n}$.

a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass

$p_n(x) = (1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt.

b) Folgern Sie aus a), dass p_n außer $x = \pm 1$ keine weiteren Nullstellen besitzt ($n \in \mathbb{N}$).

a) I.A. $p_2(x) = 1 - x^{2^2} = 1 - x^4$

$x^{2^{2-1}} = x^2$

$$\underbrace{\underbrace{(1-x)(1+x)}_{(1-x^2)}(1+x^2)}_{1-x^4} = 1 - x^4 \quad ✓$$

I.S. $p_{n+1}(x) = (1 - x^{2^{n+1}}) = (1 - x^{2^n \cdot 2})$

$$= (1 - (x^{2^n})^2) = (1 - x^{2^n})(1 + x^{2^n})$$

$$\underset{\text{I.V.}}{=} (1-x)(1+x)(1+x^2) + \dots (1 + x^{2^{n-1}})(1 + x^{2^n}) \quad ✓$$

b) Ab dem 3. Term sind die Klammern immer >= 1, können also nicht zu einer Nullstelle führen. Die ersten beiden Terme führen zu den Nullstellen +1 und -1.