A2018

A2018

a) Gegeben sind vier positive reelle Zahlen $a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2}$.

Beweisen Sie, dass dann $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$ gilt.

b) Gegeben sind $2n$ positive Zahlen $a_1, a_2, ..., a_n b_1, b_2, ..., b_n > 0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_2}{b_2} ... \leq \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \leq \frac{a_n}{b_n}$.

Beweisen Sie, dass $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$

a) z.z.(1): $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}$

$$a_1(b_1+b_2) \leq b_1(a_1+a_2)$$

$$\cancel{a_1b_1} + a_1b_2 \leq \cancel{b_1a_1} + b_1a_2 \quad \checkmark \quad \text{nach Vor.}$$

z.z.(2): $\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2} \leq \frac{a_2}{b_2}$

$$a_1b_2 + \cancel{a_2b_2} \leq a_2b_1 + \cancel{a_2b_2} \quad \checkmark \quad \text{nach Vor.}$$

b) I.A: $n=1$: $\frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1}{b_1}$ ✓

I.S.:

$$\frac{a_1}{b_1} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \underbrace{\frac{a_1+...+a_n}{b_1+....+b_n} \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{a_n}{b_n} \overset{\text{Vor.}}{\leq} \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}}}_{\Downarrow (a)}$$

$$\frac{a_1+...\ a_n}{b_1+....\ b_n} \leq \frac{a_1+...+a_{n+1}}{b_1+...+b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} \leq \frac{a_1+...+a_{n+1}}{b_1+...\ b_{n+1}} \leq \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \qquad \text{q.e.d.}$$