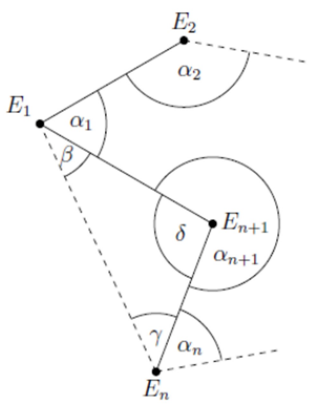
A2017

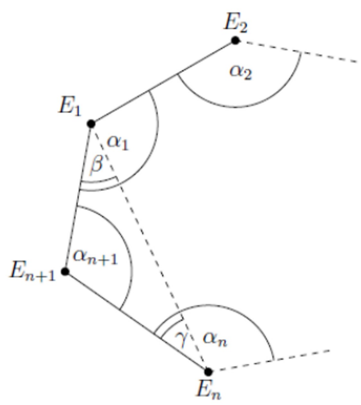
A2017

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$. Ein einfaches n-Eck hat n verschiedene Eckpunkte $E_1, ..., E_n$, die durch Kanten verbunden sind. Außerdem schneiden sich die Kanten nicht, und für die Innenwinkel $\alpha_1, ..., \alpha_n$ an den Ecken gilt: $\alpha_j \neq 0°, 180°, 360°$ für $j = 1, ..., n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summe S_n der Innenwinkel in einem einfachen n-Eck mit $n \geq 3$ gilt: $S_n = (n-2) \cdot 180°$. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt.
Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\alpha_{n+1} > 180°$ und $\alpha_{n+1} < 180°$. Verwenden Sie die in der jeweiligen Skizze eingezeichnete Hilfslinie.

Fall $\alpha_{n+1} > 180°$



Fall $\alpha_{n+1} < 180°$



I.A: $n = 3$ $\quad S_3 = (3-2) \cdot 180° = 180°$ ✓

I.S:

Fall 1: $\alpha_{n+1} > 180°$

$$S_{n+1} = S_n - \beta - \gamma + (360° - \delta)$$
$$= S_n + 360° - \underbrace{(\beta + \gamma + \delta)}_{180°} = S_n + 180°$$
$$\underset{\text{I.V.}}{=} (n-2) \cdot 180° + 180° = ((n+1)-2) \cdot 180°$$ ✓

Fall 2: $\alpha_{n+1} < 180°$:

$$S_{n+1} = S_n + \underbrace{\beta + \gamma + \alpha_{n+1}}_{180°} \underset{\text{I.V.}}{=} (n-2) \cdot 180° + 180° = ((n+1)-2) \cdot 180°$$ ✓