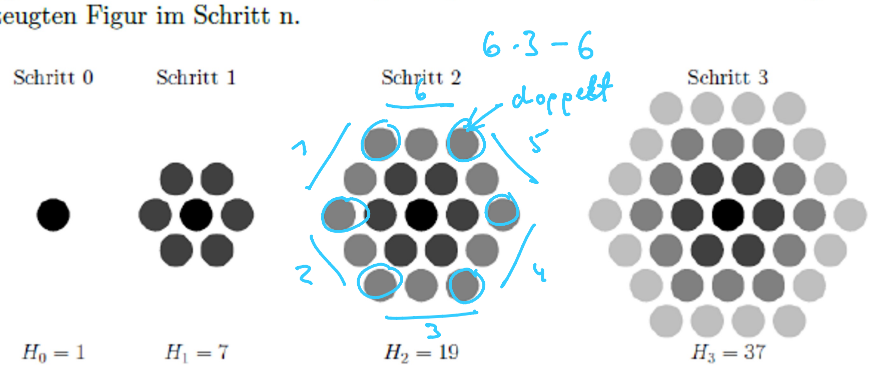
A2016

A2016

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Sechseckszahlen $H_n (n = 0, 1, 2, ...)$. Wir betrachten dazu Anordnungen von Kreisen mit gleichem Radius, die schrittweise folgendermaßen erzeugt werden: Im Schritt 0 beginnen wir mit einem einzelnen Kreis, der im Schritt 1 wie unten skizziert durch Anlagerung von sechs weiteren Kreisen zu einer sechseckartigen Figur ergänzt wird. Nachfolgend wird im Schritt n + 1 die Figur aus dem Schritt n durch eine weitere äußere Lage von Kreisen zu einer noch größeren sechseckartigen Figur ergänzt, wobei sich die Länge der äußeren Seiten um jeweils eine Kugel erhöht. Die Sechseckzahl H_n entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der so erzeugten Figur im Schritt n.



a) Drücken Sie H_{n+1} durch H_n aus $(n = 0, 1, 2, ...)$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Sechseckzahl die Gleichung $H_n = 3n^2 + 3n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Summe der Sechseckzahlen gerade die Kubikzahlen $\sum_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$ liefert $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Sie dürfen die Formel aus Teil b) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

$$H_2 = H_1 + 6 \cdot 3 - 6$$

a) $H_{n+1} = H_n + 6 \cdot (n+2) - 6 = H_n + 6n + 6$

b) I.A.: $H_0 = 1$ ✓

I.S.: $H_{n+1} = H_n + 6n + 6 \overset{\text{I.V.}}{=} 3n^2 + 3n + 1 + 6n + 6$
$= 3n^2 + 9n + 7$

$3(n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = 3(n^2 + 2n + 1) + 3n + 3 + 1$
$= 3n^2 + 6n + 3 + 3n + 3 + 1$
$= 3n^2 + 9n + 7$ ✓

c) Induktion über n

I.A.: $n=1$ $\quad \sum_{k=0}^{0} H_0 = H_0 = 1 = 1^3$ ✓

I.S.: $\sum_{k=0}^{(n+1)-1} H_k = \sum_{k=0}^{n-1} H_k + H_n \overset{\text{I.V., b.}}{=} n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
$= (n+1)^3$ ✓

$$\sum_{k=0} H_k = \sum_{k=0} H_k + H_n = n + 3n + 3n + 1$$

$$= (n+1)^3 \quad \checkmark$$