Vertiefungskurs Mathematik

Beweismethoden

Direkter Beweis

Mathematische Sätze sind meist als $A \Rightarrow B$ formuliert.

Lies: 'Aus A folgt B' oder 'A impliziert B' oder 'Wenn A wahr ist, dann ist auch B wahr'.

Statt 'A ist wahr' sagt man auch 'A gilt'.

Man nennt dann A die *Voraussetzung* und B die *Behauptung*.

Beim *direkten Beweis* geht man davon aus, dass A wahr ist und folgert durch eine Kette gültiger Argumente, dass dann auch B wahr ist.

Beispiel

Satz: Teilt eine natürliche Zahl t zwei ganze Zahlen a und b, dann teilt t auch deren Summe.

Beweis: Da t die Zahlen a und b teilt, kann man a und b darstellen als $a = t \cdot k$ und $b = t \cdot l$ für geeignete $k, l \in \mathbb{Z}$. Damit gilt:
$a + b = t \cdot k + t \cdot l = t \cdot (k + l)$. Da $(k + l) \in \mathbb{Z}$, teilt t auch $a + b$. $\square$

Für die eigenen Überlegungen kann es sinnvoll sein, sich Voraussetzung und Behauptung explizit hinzuschreiben und die Argumentation mit mathematischen Symbolen zu entwerfen.

Voraussetzung: $t \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z}, t|a$ und $t|b$

Behauptung: $t|(a+b)$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
& t|a \wedge t|b \\
& \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z} : a = k \cdot t \wedge b = l \cdot t \\
& \Rightarrow a + b = k \cdot t + l \cdot t = (k + l) \cdot t \\
& \Rightarrow t|(a+b) \qquad \qquad \qquad \qquad \square
\end{aligned}
$$

Die 'mathematische Etikette' verlangt, dass man viel Wert auf Begleittext legt und so wenig Folgepfeile und Junktoren wie möglich verwendet.

Indirekter Beweis - Kontraposition

Will man den Satz $A \Rightarrow B$ beweisen, so kann man auch seine *Kontraposition* beweisen.

$\neg B \Rightarrow \neg A$

Satz: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n^2 gerade, dann ist auch n gerade.

Kontraposition: Sei $n \in \mathbb{N}$. Wenn n ungerade, dann ist auch n^2 ungerade.

Beweis der Kontraposition: Als ungerade Zahl lässt sich n als $n = 2k + 1$ mit einem $k \in \mathbb{N}$ darstellen. Für das Quadrat von n gilt daher:

$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Also ist n^2 ungerade. $\square$

Indirekter Beweis - Widerspruchsbeweis

Man geht davon aus, dass die zu beweisende Aussage falsch ist und führt dies zu einem Widerspruch.

Satz: Es gibt unendliche viele Primzahlen.

Beweis: Annahme, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ...p_n$. Wir bilden $m = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$. Da m größer ist als jedes $p_1, ..., p_n$, kann es keines dieser p_i, also keine Primzahl sein. m besteht aus Primfaktoren, wir nehmen an, dass Primzahl p_k als Faktor vorkommt. Dann gilt:

$m = p_k \cdot t = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n + 1$ für ein $t \in \mathbb{N}$. Also gilt:
$p_k \cdot t - p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_n = 1$. Ausklammern von p_k ergibt:
$p_k \cdot (t - p_1 \cdot p_2 \cdot ...(\text{ohne } p_k)... \cdot p_n) = 1$.

Das ist unmöglich, da p_k als Primzahl größer als 1 ist und der Term in der Klammer kein Bruch ist. $\square$

Satz: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational , dann lässt sich $\sqrt{2}$ darstellen als vollständig gekürzter Bruch $\frac{p}{q}$. Damit gilt $2 \cdot q^2 = p^2$, also ist p^2 gerade und damit auch p. Also lässt sich p darstellen als $p = 2k$ mit geeignetem $k \in \mathbb{N}$. Eingesetzt in die Gleichung ergibt sich: $2 \cdot q^2 = 4 \cdot k^2$. Daraus folgt $q^2 = 2 \cdot k^2$, also ist q^2 gerade und damit auch q. Da p und q beide gerade sind, ist $\frac{p}{q}$ kein vollständig gekürzter Bruch, im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Beweis durch vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist ein Beweisverfahren, das in folgender Situation angewendet wird: Zu jeder natürlichen Zahl n ist eine Aussage $A(n)$ gegeben, deren Gültigkeit man beweisen will.

Dazu beweist man:

- (IA) Induktionsanfang: $A(1)$ ist wahr.
- (IS) Induktionsschritt: Wenn $A(n)$ wahr ist, dann ist auch $A(n+1)$ wahr.

Im Induktionsschritt nennt man die Annahme, dass $A(n)$ wahr ist, Induktionsvoraussetzung (IV).

Für eine Aussage $B(n)$ für alle $n > n_0$, nimmt man $B(n_0)$ als Induktionsanfang.

Das Summenzeichen

In den Sätzen, die wir mit vollständiger Induktion beweisen werden, wird manchmal das Summenzeichen benutzt:

$$\sum_{k=1}^{20} k = 1 + 2 + 3..... + 19 + 20$$

Weitere Beispiele:

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3..... + n$$

$$\sum_{j=0}^{n} (2j+1) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n+1)$$

$$\sum_{j=0}^{n} a^j b^{n-j} = a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + a^2 b^{n-2} + ... + a^{n-1} b^1 + a^n b^0$$

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

Beweis durch vollständige Induktion:
IA: Für n=1 stimmt die Formel, denn $1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$
IS: Wir nehmen an, die Formel gilt für n. Wir müssen zeigen:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{!}{=} \frac{1}{2}(n+1)(n+2). \qquad (1)$$
Mit der Induktionsvoraussetzung berechnet sich die linke Seite zu:
$$1 + 2 + ... + n + (n+1) \overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{2}n(n+1) + (n+1) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1$$
Die rechte Seite von (1) berechnet sich zu:
$$\frac{1}{2}(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}(n^2 + 2n + n + 2) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1.$$
Also gilt Gleichung (1). $\square$