Aufgaben der Zertifikatsklausuren

A2021
a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass
$\sum_{j=0}^{n}(2j+1)=(n+1)^2$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.
b) Es seien a,b reelle Zahlen. Beweisen Sie: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt
$(a-b)\cdot\sum_{j=0}^{n}a^jb^{n-j}=a^{n+1}-b^{n+1}$.

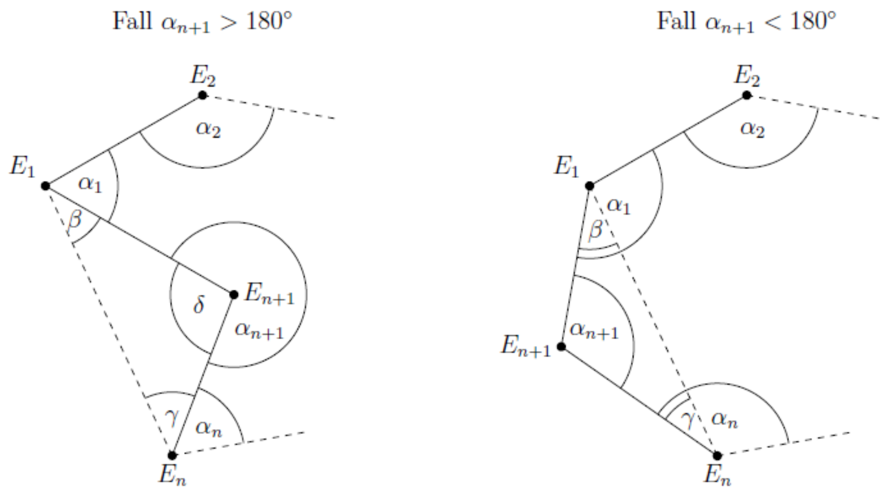
A2020
Es sei $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft
(*) $\quad f(x\cdot y)=f(x)+f(y)$ für alle $x,y>0$.
a) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $f(2^n)=n\cdot f(2)$ für $n\in\mathbb{N}$ gilt.
b) Beweisen Sie, dass $f(1)=0$ gilt.
c) Beweisen Sie, dass $f(\frac{1}{x})=-f(x)$ für alle $x>0$ gilt.

Hinweise: Setzen Sie geeignete Werte für x,y in (*) ein. Im Aufgabenteil c) darf das Ergebnis aus b) verwendet werden, auch wenn Teil b) nicht gelöst wurde.

A2019
Für $n\in\mathbb{N}$ und $x\in\mathbb{R}$ sei $p_n(x)=1-x^{2^n}$.
a) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass
$p_n(x)=(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)...(1+x^{2^{n-1}})$ für alle $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 2$ gilt.
b) Folgern Sie aus a), dass p_n außer $x=\pm 1$ keine weiteren Nullstellen besitzt ($n\in\mathbb{N}$).

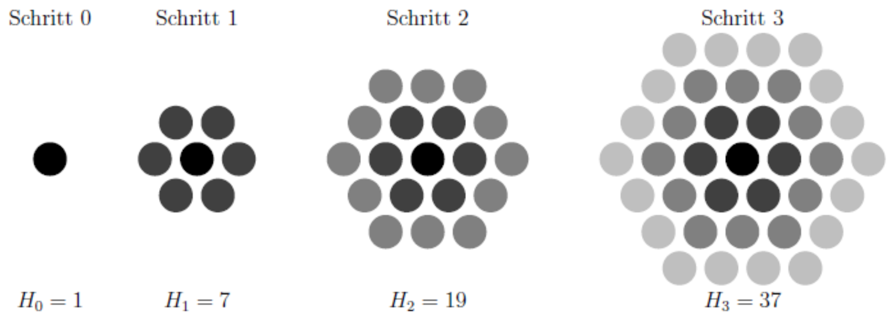
A2018
a) Gegeben sind vier positive reelle Zahlen $a_1,a_2,b_1,b_2>0$ mit der Eigenschaft $\frac{a_1}{b_1}\leq\frac{a_2}{b_2}$.
Beweisen Sie, dass dann $\frac{a_1}{b_1}\leq\frac{a_1+a_2}{b_1+b_2}\leq\frac{a_2}{b_2}$ gilt.
b) Gegeben sind $2n$ positive Zahlen $a_1,a_2,...,a_nb_1,b_2,...,b_n>0$ mit der Eigenschaft
$\frac{a_1}{b_1}\leq\frac{a_2}{b_2}...\leq\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\leq\frac{a_n}{b_n}$.
Beweisen Sie, dass $\frac{a_1}{b_1}\leq\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}\leq\frac{a_n}{b_n}$

A2017
Es sei $n\in\mathbb{N}$ mit $n\geq 3$. Ein einfaches n-Eck hat n verschiedene Eckpunkte $E_1,...,E_n$, die durch Kanten verbunden sind. Außerdem schneiden sich die Kanten nicht, und für die Innenwinkel $\alpha_1,...,\alpha_n$ an den Ecken gilt: $\alpha_j\neq 0°,180°,360°$ für $j=1,...,n$.
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass für die Summe S_n der Innenwinkel in einem einfachen n-Eck mit $n\geq 3$ gilt: $S_n=(n-2)\cdot 180°$. Hierbei darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Winkelsumme im Dreieck $180°$ beträgt.
Hinweis: Unterscheiden Sie im Induktionsschritt die Fälle $\alpha_{n+1}>180°$ und $\alpha_{n+1}<180°$. Verwenden Sie die in der jeweiligen Skizze eingezeichnete Hilfslinie.



A2016

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Sechseckszahlen $H_n (n = 0, 1, 2, ...)$. Wir betrachten dazu Anordnungen von Kreisen mit gleichem Radius, die schrittweise folgendermaßen erzeugt werden: Im Schritt 0 beginnen wir mit einem einzelnen Kreis, der im Schritt 1 wie unten skizziert durch Anlagerung von sechs weiteren Kreisen zu einer sechseckartigen Figur ergänzt wird. Nachfolgend wird im Schritt n + 1 die Figur aus dem Schritt n durch eine weitere äußere Lage von Kreisen zu einer noch größeren sechseckartigen Figur ergänzt, wobei sich die Länge der äußeren Seiten um jeweils eine Kugel erhöht. Die Sechseckzahl H_n entspricht der Gesamtzahl der Kugeln in der so erzeugten Figur im Schritt n.



a) Drücken Sie H_{n+1} durch H_n aus $(n = 0, 1, 2, ...)$

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die n-te Sechseckzahl die Gleichung $H_n = 3n^2 + 3n + 1$ für $n \in \mathbb{N}$ erfüllt.

c) Zeigen Sie, dass die Summe der Sechseckzahlen gerade die Kubikzahlen $\sum\limits_{k=0}^{n-1} H_k = n^3$ liefert $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Sie dürfen die Formel aus Teil b) verwenden, auch wenn Sie diese nicht bewiesen haben.

Sonstige Aufgaben

A1: Identifiziere Voraussetzung und Behauptung. Überlege, ob die Aussage wahr oder falsch ist und beweise oder widerlege sie.

a) Jede natürliche Zahl $n \geq 2$ hat eine gerade Anzahl von Teilern.

b) Das Produkt zweier ungerader natürlicher Zahlen ist ungerade.

c) Für natürliche Zahlen n gilt: n^3 ist ungerade, wenn n ungerade ist.

d) $n(n-1) + 41$ ist für jede natürliche Zahl n eine Primzahl.

e) Für jede natürlicher Zahl n gilt: Ist $n^2 + 6n + 4$ ungerade, dann ist n ungerade.

A2: Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt rational, wenn sie sich als Bruch $a = \frac{p}{q}$ mit ganzzahligen p, q und $q \neq 0$ darstellen lässt. Gegeben seien eine feste rationale Zahl $a \neq 0$ und eine beliebige reelle Zahl b. Folgender Satz soll untersucht werden:

Ist b nicht rational, so ist auch $a \cdot b$ nicht rational.

a. Gib die Voraussetzung und Behauptung des Satzes an.

b. Bilde die Kontraposition.

c. Beweise den Satz.

A3: Beweise durch Widerspurch

a) $\sqrt{3}$ ist irrational.

b) Ist x rational, so ist $\sqrt{2} + x$ irrational.

A4: Beweise mit vollständiger Induktion: Für alle natürlichen Zahlen gilt:

a) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

b) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$

c) $\sum\limits_{k=1}^{n} 2k = n(n+1)$

d) 5 ist Teiler von $6^n - 1$

e) 6 ist Teiler von $n^3 - n$

f) $2^n > n$

g) $n^2 > 2n + 1$ falls $n \geq 3$