Aufgaben aus den Zertifikatsklausuren

A2023

Die Verknüpfung * von zwei Aussagen A und B ist definiert durch die Wahrheitstabelle

A	B	$A*B$
w	w	f
w	f	w
f	w	w
f	f	w

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $A*(B*B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Amelie, Berta, Chiara und Dora waren Pilze sammeln. Sie haben Maronen, Pfifferlinge, Rotkappen und Steinpilze gefunden. Eines der Mädchen hat zwei Sorten gefunden, zwei haben drei Sorten gefunden und eine sogar alle vier.
Bekannt ist, dass die folgenden Aussagen falsch sind.
1) Dora hat Maronen oder Pfifferlinge gefunden oder beide Sorten.
2) Chiara hat Pfifferlinge gefunden.
3) Berta und Chiara haben die selben Pilzsorten gefunden.
4) Amelie hat entweder Maronen oder Pfifferlinge gefunden.
5) Berta hat Maronen und Pfifferlinge gefunden.
Zeigen Sie, dass eindeutig bestimmt ist, wer welche Sorten gefunden hat, und finden Sie heraus, wer welche Sorten gefunden hat.

A2022

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Eine der vier Frauen Maier, Schmidt, Müller und Weber ist von Beruf Försterin, eine andere Lehrerin, eine dritte Polizistin und die vierte Ingenieurin. Jede der folgende Aussagen über ihre Berufe ist falsch.
(i) Frau Schmidt ist Lehrerin oder Frau Müller ist Ingenieurin.
(ii) Frau Weber ist Lehrerin und Frau Müller ist keine Försterin.
(iii) Wenn Frau Maier Ingenieurin ist, dann ist Frau Schmidt Polizistin.
b1) Bestimmen Sie die Negationen der drei Aussagen.
Hinweis: Die Äquivalenz aus Teil a) darf verwendet werden.
b2) Welche der Frauen hat welchen Beruf? Weisen Sie nach, dass die Lösung eindeutig ist.

A2021

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(A \vee \neg B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Ein Kommissar hat aus Mitschnitten von Telefonaten erfahren, dass die Bank in Olm, die in Prix oder die in Rans überfallen werden soll. Sogar die Flucht mit drei Autos (SUV, Limousine, Transporter) ist minutiös geplant. Er hat folgende Informationen:
(i) Einer der Fluchtwagen wird vor der Bank stehen, die überfallen wird.
(ii) Der SUV oder die Limousine werden in Olm für die Flucht bereit gehalten.
(iii) Wenn die Bank in Olm überfallen wird, dann wird der Transporter in Prix bereit gestellt.
(iv) Die Bank in Olm oder die in Prix soll überfallen werden.
(v) Die Limousine wird in Olm abgestellt oder der Transporter nicht in Rans.
Zum Schluss erreicht ihn die Meldung, dass die Aussage (v) falsch ist. Helfen Sie dem Kommissar.
b1) Bilden Sie die Negation ¬ (v) der Aussage (v).
b2) Zeigen Sie, dass durch die Aussagen (i), (ii), (iii), (iv) und ¬(v) eindeutig bestimmt ist, welche der Banken überfallen werden soll und wo die Fluchtautos stehen. Geben Sie an, wo jedes der Autos steht und in welchem Ort der Überfall stattfinden soll.

A2020

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Tim, Chris, Niko und Alex tragen T-Shirts in verschiedenen Farben: Schwarz, weiß, grün und blau. Vanessa hat die drei gesehen und erzählt ihren Freundinnen:
(1) Tims Shirt ist nicht schwarz und auch nicht weiß.
(2) Das Shirt von Alex ist blau.
(3) Tim trägt nicht blau und Niko nicht weiß.
Die Freundinnen raten sofort los: Alex trägt blau, Tim grün, Niko schwarz und Chris weiß. Aber Vanessa ergänzt, dass alle drei Aussagen (1), (2) und (3) falsch sind.

b1) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3).
b2) Beweisen Sie, dass eindeutig bestimmt ist, welcher der vier Jungs welche Farbe trägt, wenn die drei Aussagen falsch sind. Geben Sie an, wer welche Farbe trägt.

A2019

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist.

b) Ein Geheimdienst beobachtet vier Spione A, B, C, D und möchte ihre Namen herausbekommen. Nachdem ein Treffen der vier Spione beobachtet wurde, steht fest, dass ihre Namen Alexander, Francois, James und Pjotr sind, und dass keine zwei den selben Namen besitzen. Außerdem konnte ermittelt werden, dass die folgenden Aussagen wahr sind.

b1) A heißt James oder Alexander,
b2) Wenn A James heißt, dann heißt C Francois,
b3) Wenn B nicht Alexander heißt, dann heißt C Pjotr,
b4) C heißt nicht Francois,
b5) B heißt Pjotr oder B heißt nicht Francois.
Zeigen Sie, dass die Namen der Spione A, B, C, D durch die Angaben eindeutig bestimmt sind, und geben Sie an, wie jede der Personen heißt.

A2018

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgende Aussage für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr ist: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B))$.

b) Vor einem Fußballturnier fachsimpeln Zuschauer über den möglichen Ausgang. Über die drei Favoriten A, B und C werden folgende vier Vermutungen geäußert:

a. B gewinnt oder C gewinnt.
b. Wenn B Zweiter wird, dann gewinnt A.
c. Wenn B Dritter wird, dann gewinnt C nicht.
d. A wird Zweiter oder B wird Zweiter.
Am Ende des Turniers belegen die drei Favoriten tatsächlich die ersten drei Plätze. Es stellt sich heraus, dass alle vier Vermutungen richtig waren. Welche Plätze erzielten A, B, und C?

A2017

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Bei einem Ausflug unterhält sich eine Gruppe von Schülern, es ist von Aki, Bauzi, Chips und Dani die Rede. Die Lehrerin möchte wissen, wovon die Schüler reden. Ein Schüler antwortet: „Von einem Jungen, einem Mädchen, einem Hund und einer Katze.“
Außerdem bekommt die Lehrerin folgende Hinweise:
(1) Die Katze heißt Chips.
(2) Aki ist nicht der Junge und Bauzi ist nicht das Mädchen.
(3) Wenn Dani das Mädchen ist, dann ist Aki der Hund.
Die Lehrerin meint, da gäbe es mehrere Möglichkeiten. Daraufhin lachen die Schüler los, und einer sagt: „Die Hinweise sind alle falsch.“ Nach kurzem Überlegen weiß die Lehrerin Bescheid.

b1) Zeigen Sie, dass die Bedingungen (1), (2), (3) mindestens zwei verschiedene Zuordnungen der Namen zulassen.
b2) Verneinen Sie die Aussagen (1), (2) und (3). *Hinweis:* Die Äquivalenz aus Teil a) darf verwendet werden.
b3) Wie heißen der Junge, das Mädchen, die Katze und der Hund? Weisen Sie nach, dass die Lösung eindeutig ist.

A2016

a) Beweisen Sie mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die Aussage $(A \wedge (\neg B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow B$ für beliebige Wahrheitswerte von A, B wahr ist.

b) Der Kommissar hat drei Tatverdächtige: Paula, Quentin und Ralf. Er weiß:
a. Wenn sich Quentin oder Ralf als Täter herausstellen, ist Paula unschuldig.
b. Ist aber Paula oder Ralf unschuldig, dann muss Quentin ein Täter sein.
c. Ist Ralf schuldig, so ist Paula Mittäterin.
Wer ist schuldig? Wer ist unschuldig?

Sonstige Aufgaben

A1: Beweisen Sie, dass folgende Aussagen für beliebige Wahrheitswerte von A und B wahr sind:

a. $((\neg A \Rightarrow B) \wedge \neg B) \Rightarrow A$
b. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \vee B)$

A2: Formuliere den Satz aussagenlogisch.
a. Wenn Peter nicht kommt und wenn Otto nicht kommt, dann kommt Clara nicht.
(p: Peter kommt, q: Otto kommt, r: Clara kommt)
b. Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist.
(p: Der Hahn kräht, q: Das Wetter ändert sich)
c. Die Mutter ist wütend genau dann, wenn Klaus nicht sein Zimmer aufräumt oder Wilma die Schule schwänzt.
(m: Mutter ist wütend, k: Klaus räumt Zimmer auf, w: Wilma schwänzt die Schule

A3: Gegeben seien natürliche Zahlen a, b und c. Formuliere zu folgendem Satz die Umkehrung, die Kontraposition und die Kontraposition der Umkehrung.
Wenn a und b durch c teilbar sind, dann ist auch ihre Summe a+b durch c teilbar.

A4: Gegeben sind die folgenden Aussagen:
a. Jeder Drache ist nicht grün
b. Für jeden Drachen gilt: Wenn er fliegen kann, dann ist er glücklich.
c. Alle grünen Drachen können fliegen und sind glücklich.
d. Wenn ein Drache grün ist, dann sind alle seine Kinder grün.
e. Jeder Drache ist glücklich, wenn alle seine Kinder fliegen können.

Formuliere die Aussagen prädikatenlogisch. Benutze dafür $X :=$ die Menge aller Drachen, $K(x) :=$ Menge aller Kinder des Drachen x, und die Aussagen $fl(x), gl(x), gr(x)$, deren Wahrheitswerte folgendermaßen definiert sind:
- Die Aussage $fl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x fliegen kann,
- Die Aussage $gl(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x glücklich ist,
- Die Aussage $gr(x)$ ist genau dann wahr, wenn der Drache x grün ist.