1. (3 Punkte) Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 0.5 + 2i$ und $z_2 = -1 - i$. Berechne:

   a) $z_1 + z_2$

   b) $z_1 \cdot z_2$

   c) z_1^2

Lösung:

a) $z_1 + z_2 = -0.5 + i$

b) $z_1 \cdot z_2 = -0.5 - 0.5i - 2i - 2i^2 = 1.5 - 2.5i$

c) $z_1^2 = 0.25 - 4 + 2i = -3.75 + 2i$

2. (4 Punkte) Rechne ohne Taschenrechner.

   a) Berechne i^3 und i^4.

   b) Berechne den Betrag von $3 - 4i$.

   c) Gib an, was ausgegeben wird.

```
print((1 + 1j)**2)
```

Lösung:

a) $i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$

b) $|3 - 4i| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

c) `2j`, denn $(1 + i)^2 = 1 - 1 + 2i = 2i$.

3. (3 Punkte) Berechne jeweils die Folgenglieder z_0 bis z_4 der Mandelbrotfolge und entscheide, ob die Zahl zur Mandelbrotmenge gehört.

   a) $c = -2$

   b) $c = 2$

Lösung:

a) $0, -2, 2, 2, 2$. Ab z_2 bleibt die Folge bei 2, ist also beschränkt. -2 gehört zur Mandelbrotmenge.

b) $0, 2, 6, 38, 1446$. Schon $z_2 = 6$ ist größer als 2, die Folge explodiert. 2 gehört nicht zur Mandelbrotmenge.

4. (3 Punkte) Berechne die Folgenglieder z_0 bis z_3 der Mandelbrotfolge für $c = -1 + i$ ohne Taschenrechner. Entscheide, ob c zur Mandelbrotmenge gehört.

Lösung: $z_0 = 0$
$z_1 = -1 + i$
$z_2 = (-1 + i)^2 + (-1 + i) = (1 - 1 - 2i) - 1 + i = -1 - i$
$z_3 = (-1 - i)^2 + (-1 + i) = (1 - 1 + 2i) - 1 + i = -1 + 3i$
$|z_3| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10} \approx 3.16 > 2$. Die Folge explodiert, c gehört nicht zur Mandelbrotmenge.

5. (3 Punkte) Berechne die Folgenglieder z_0, z_1, z_2 der Mandelbrotfolge für $c = -1.5 - i$. Begründe, welche Farbe der zugeordnete Punkt bei dieser Iterationsstufe in einem schwarz-weißen Bild der Mandelbrotmenge erhält.

Lösung: $z_0 = 0, \quad z_1 = -1.5 - i, \quad z_2 = -0.25 + 2i$
$|z_2| = \sqrt{0.0625 + 4} \approx 2.016$. Da $|z_2| > 2$, gehört der Punkt nicht zur Mandelbrotmenge und wird weiß gefärbt.

6. (4 Punkte) Berechne die Folgenglieder z_0, z_1, z_2, z_3 der Mandelbrotfolge für $c = 0.3 - 1.05i$. Begründe, welche Farbe der zugeordnete Punkt bei dieser Iterationsstufe in einem schwarz-weißen Bild der Mandelbrotmenge erhält. Runde auf 3 Stellen nach dem Komma.

Lösung: $z_0 = 0, \quad z_1 = 0.3 - 1.05i, \quad z_2 = -0.712 - 1.680i, \quad z_3 = -2.015 + 1.344i$
$|z_3| = 2.422$. Da $|z_3| > 2$, gehört der Punkt nicht zur Mandelbrotmenge und wird weiß gefärbt.

7. (4 Punkte) Berechne die Folgenglieder z_0, z_1, z_2, z_3 der Mandelbrotfolge für $c = 0.42 - 0.39i$. Begründe, welche Farbe der zugeordnete Punkt bei dieser Iterationsstufe in einem schwarz-weißen Bild der Mandelbrotmenge erhält. Runde auf 3 Stellen nach dem Komma.

Lösung: $z_0 = 0, \quad z_1 = 0.42 - 0.39i, \quad z_2 = 0.444 - 0.718i, \quad z_3 = 0.102 - 1.028i$
$|z_3| = 1.033$. Da $|z_3| \leq 2$, gehört der Punkt bei dieser Iterationsstufe zur Mandelbrotmenge und wird schwarz gefärbt.

8. (2 Punkte) Was wird ausgegeben?

```
def mandelzahl(c, kmax):
    z = 0
    for i in range(kmax):
        if abs(z) > 2: return i
        z = z**2 + c
    return -1

print(mandelzahl(0.6, 100))
```

Lösung: 4

Die Folge ist 0, 0.6, 0.96, 1.5216, 2.915 ... Das Folgenglied mit Index 4 ist als erstes größer als 2.

9. (2 Punkte) Was wird ausgegeben?

```
def mandel(c, k):
    if k == 0: return 0
    return mandel(c, k-1)**2 + c

print(mandel(1, 3), mandel(-1, 7))
```

Lösung: `5 -1`

Für $c = 1$ ist die Folge $0, 1, 2, 5, \ldots$, für $c = -1$ ist sie $0, -1, 0, -1, \ldots$ Bei ungeradem Index steht dort -1.

10. (3 Punkte) Ein Ausschnitt der Mandelbrotmenge soll auf einem Bild mit 800×600 Pixeln gezeichnet werden. Das Pixel oben links (0, 0) entspricht der Zahl $-1.6 + 0.3i$. Benachbarte Pixel entsprechen Zahlen, deren Real- bzw. Imaginärteil sich um 0.001 unterscheidet.

   a) Gib an, welche Zahl untersucht werden muss, um die Farbe des Pixels (250, 120) zu bestimmen.

   b) Gib an, welche Zahl zum Pixel unten rechts gehört.

Lösung:

a) Realteil: $-1.6 + 250 \cdot 0.001 = -1.35$. Imaginärteil: $0.3 - 120 \cdot 0.001 = 0.18$, denn die Pixelzeilen werden nach unten gezählt. Die Zahl ist $-1.35 + 0.18i$.

b) Das Pixel unten rechts ist (799, 599): $-1.6 + 0.799 = -0.801$ und $0.3 - 0.599 = -0.299$. Die Zahl ist $-0.801 - 0.299i$.

11. (2 Punkte) Was wird ausgegeben?

```
import numpy as np

for i, x in enumerate(np.linspace(0, 2, 5)):
    if i % 2 == 0:
        print(i, x)
```

Lösung:

```
0 0.0
2 1.0
4 2.0
```

`np.linspace(0, 2, 5)` liefert 0, 0.5, 1, 1.5, 2. Ausgegeben werden die mit geradem Index.

12. (2 Punkte) Ein Bild der Mandelbrotmenge wird so gefärbt:

```
farben = ['gelb', 'orange', 'rot', 'blau', 'grün']
mz = mandelzahl(c, 30)
if mz < 0:
    farbe = 'schwarz'
else:
    farbe = farben[mz % len(farben)]
```

Gib die Farbe der Punkte an, für die `mandelzahl` die Werte 9, 12, 5 und -1 liefert.

Lösung: 9: grün ($9\%5 = 4$), 12: rot ($12\%5 = 2$), 5: gelb ($5\%5 = 0$), -1: schwarz, der Punkt gehört bei dieser Iterationsstufe zur Mandelbrotmenge.

13. (3 Punkte) Schreibe eine Funktion `beschraenkt(c, k)`. Sie soll `True` zurückgeben, wenn die ersten `k` Folgenglieder $z_0, \ldots, z_{k-1}$ der Mandelbrotfolge zu `c` alle einen Betrag kleiner oder gleich 2 haben, sonst `False`. Verwende dabei keine der Funktionen aus dem Unterricht.

Lösung:

```
def beschraenkt(c, k):
    z = 0
    for i in range(k):
        if abs(z) > 2:
            return False
        z = z**2 + c
    return True
```