1. (3 Punkte) Für welche ganzen Zahlen `n` halten die drei Funktionen an?

```
def f(n):
    while n != 0:
        n = n - 2

def g(n):
    while n > 0:
        n = n - 3

def h(n):
    while n != 1:
        if n % 2 == 0:
            n = n // 2
        else:
            n = n + 1
```

2. (2 Punkte) Die Funktion `collatz` aus dem Notebook halbiert eine gerade Zahl, eine ungerade Zahl wird mit 3 multipliziert und um 1 erhöht, bis die 1 erreicht ist.
   (a) Schreibe die Folge für `n = 7` auf. Wie viele Schritte sind es?
   (b) Ob die Funktion für jede natürliche Zahl anhält, weiß niemand. Was müsste man finden, um die Vermutung zu widerlegen?

3. (4 Punkte) Wir nehmen an, es gäbe eine Funktion `haltetest(pgm, inp)`, die `True` zurückgibt, wenn `pgm` angesetzt auf `inp` anhält, sonst `False`.

```
def quer(x):
    if haltetest(x, x):
        while True:
            pass
```

   (a) Beschreibe in eigenen Worten, was `quer` macht.

   (b) Zeige, dass die Frage, ob `quer(quer)` anhält, zu einem Widerspruch führt.

   (c) Was folgt aus dem Widerspruch?

4. (3 Punkte) (a) Jemand ersetzt im Beweis die Funktion `quer` durch

```
def gleich(x):
    if not haltetest(x, x):
        while True:
            pass
```

   Führt die Frage, ob `gleich(gleich)` anhält, ebenfalls zu einem Widerspruch?

   (b) Jemand meint: Man muss ein Programm nur eine Stunde laufen lassen. Ist es dann noch nicht fertig, hält es nicht an. Was ist falsch daran?

5. (4 Punkte) Angenommen, es gäbe eine Funktion `druckthallo(pgm, inp)`. Sie gibt `True` zurück, wenn `pgm` angesetzt auf `inp` irgendwann `Hallo` ausgibt, sonst `False`.
   (a) Schreibe mit Hilfe von `druckthallo` eine Funktion `haltetest(pgm, inp)`. Du kannst annehmen, dass `pgm` selbst nichts ausgibt.
   Tipp: Schreibe innerhalb von `haltetest` eine neue Funktion, die zuerst `pgm(inp)` aufruft.
   (b) Was folgt daraus für `druckthallo`?

6. (2 Punkte) Gegeben sind die Dominosteine `1: (1, 111)`, `2: (10111, 10)` und `3: (10, 0)`, jeweils (oben, unten). Schreibe für beide Folgen das obere und das untere Gesamtwort auf. Ist die Folge eine Lösung?
   (a) 2, 1, 1, 3
   (b) 2, 3, 1

7. (3 Punkte) Gegeben sind die Dominosteine `1: (0, 1)`, `2: (10, 0)` und `3: (0, 010)`, jeweils (oben, unten).
   (a) Mit welchem Stein muss eine Lösung beginnen? Begründe.
   (b) Finde eine Lösung mit vier Steinen. Gib nach jedem Stein den Überhang an.

8. (3 Punkte) Begründe, warum es für diese Dominosteine keine Lösung gibt. Die Steine sind jeweils als (oben, unten) angegeben.
   (a) `1: (011, 01)`, `2: (10, 1)`
   (b) `1: (01, 1)`, `2: (10, 0)`
   (c) `1: (0, 01)`, `2: (100, 1)`

9. (3 Punkte) (a) Beschreibe ein Verfahren, das für beliebige Dominosteine eine Lösung des PKP findet, wenn es eine gibt.
   (b) Warum entscheidet dieses Verfahren das PKP nicht?
   (c) Warum ist das Halteproblem semi-entscheidbar?

10. (4 Punkte) Hilberts Hotel hat die Zimmer 1, 2, 3, ..., alle sind belegt.
    (a) Drei neue Gäste kommen. In welches Zimmer zieht der Gast aus Zimmer n, welche Zimmer bekommen die neuen Gäste?
    (b) Ein Bus mit unendlich vielen Gästen kommt. Der Gast aus Zimmer n zieht in Zimmer $2n$, der Gast mit Platz k im Bus bekommt Zimmer $2k - 1$. Welches Zimmer bekommt der Gast mit Platz 10 im Bus? Wohin zieht der Gast aus Zimmer 7?
    (c) Unendlich viele Busse kommen. Die alten Gäste sind Bus 0, ihr Platz ist die alte Zimmernummer. Der Gast mit Platz k in Bus b bekommt mit $s = b + k$ das Zimmer

$$\frac{(s-1)\cdot s}{2} + b + 1$$

    Welches Zimmer bekommt der Gast mit Platz 3 in Bus 2? Wohin zieht der alte Gast aus Zimmer 5? Wer bekommt Zimmer 12?

11. (3 Punkte) Die natürlichen Zahlen werden so den ganzen Zahlen zugeordnet:

$$1 \mapsto 0, \quad 2 \mapsto 1, \quad 3 \mapsto -1, \quad 4 \mapsto 2, \quad 5 \mapsto -2, \quad \ldots$$

    (a) Welche ganzen Zahlen gehören zu 20 und zu 15?
    (b) Welche natürlichen Zahlen gehören zu 12 und zu -12?
    (c) Gib die Zuordnung als Formel an, getrennt für gerade und ungerade n.

12. (3 Punkte) Die positiven Brüche werden nach Cantor schräg abgezählt, kürzbare Brüche werden übersprungen. Die ersten elf sind

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}$$

(a) Gib die Brüche mit den Nummern 12 bis 18 an.

(b) Welche Nummer hat $\frac{3}{5}$?

(c) Warum dürfen kürzbare Brüche übersprungen werden, warum müssen sie es sogar?

13. (3 Punkte) Gegeben sind die Anfänge von sechs unendlichen 0-1-Folgen:

```
110100...  001011...  101010...  111000...  000111...  010101...
```

(a) Bilde die ersten sechs Stellen der Diagonalfolge d: An der Stelle i steht das Gegenteil der i-ten Stelle der i-ten Folge.

(b) Warum kommt d in keiner Liste von Folgen vor, die man so behandelt?

(c) Jemand schlägt vor, d einfach vorne in die Liste einzufügen. Warum ist die Liste dann immer noch nicht vollständig?

14. (2 Punkte) Angenommen, eine Liste aller Zahlen zwischen 0 und 1 beginnt mit

0,123456... 0,505050... 0,987654... 0,555555... 0,314159... 0,999999...

Bilde die ersten sechs Nachkommastellen der Zahl x aus dem Diagonalverfahren: Ist die i-te Nachkommastelle der i-ten Zahl eine 5, dann ist die i-te Stelle von x eine 4, sonst eine 5.

15. (4 Punkte) Richtig oder falsch? Begründe jeweils kurz.
    (a) Das Halteproblem ist unentscheidbar, weil die Rechner zu langsam sind.
    (b) Für ein bestimmtes Programm mit einer bestimmten Eingabe kann man oft sicher sagen, ob es anhält.
    (c) $\mathbb{N}$ ist eine echte Teilmenge von $\mathbb{Z}$, also ist $\mathbb{Z}$ mächtiger als $\mathbb{N}$.
    (d) $\mathbb{Q}$ ist überabzählbar, weil zwischen zwei Brüchen immer noch ein weiterer Bruch liegt.
    (e) Es gibt nur abzählbar viele Python-Programme.
    (f) Für fast alle Entscheidungsprobleme gibt es keinen Algorithmus.