1. (2 Punkte) Zeige mit boolescher Algebra: $(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \equiv A$

Lösung:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) &\equiv (A + B)(A + \overline{B}) \\ &\equiv AA + A\overline{B} + BA + B\overline{B} \\ &\equiv A + A(\overline{B} + B) + 0 \\ &\equiv A + A \cdot 1 \\ &\equiv A\end{aligned}$$

2. (2 Punkte) Zeige mit boolescher Algebra: $(A \vee B) \vee (A \wedge C) \equiv A \vee B$

Lösung:

$$\begin{aligned}(A \vee B) \vee (A \wedge C) &\equiv A + B + AC \\ &\equiv (A + AC) + B \\ &\equiv A + B \quad \text{(Absorption)} \\ &\equiv A \vee B\end{aligned}$$

3. (4 Punkte) Zeige mit boolescher Algebra: $(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) \equiv ((A \vee B) \wedge C) \vee (\neg A \wedge B)$

Lösung:

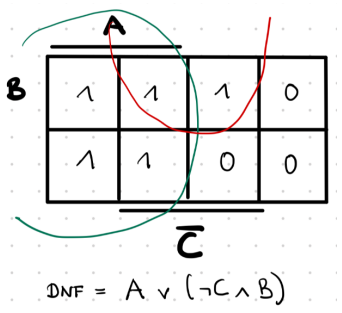
$$\begin{aligned}(A \vee B) \wedge (\neg A \vee C) \wedge (B \vee C) &\equiv (A + B)(\overline{A} + C)(B + C) \\ &\equiv (A\overline{A} + AC + B\overline{A} + BC)(B + C) \\ &\equiv (ACB + ACC + B\overline{A}B + B\overline{A}C + BCB + BCC) \\ &\equiv (ACB + AC + B\overline{A} + B\overline{A}C + BC) \\ &\equiv AC + B\overline{A} + BC \quad \text{(2 x Absorption)} \\ &\equiv (A + B)C + B\overline{A} \\ &\equiv ((A \vee B) \wedge C) \vee (\neg A \wedge B)\end{aligned}$$

4. (3 Punkte) In der logischen Formel D kommen die Variablen A, B, C vor. Die Wahrheitstafel zeigt von oben nach unten folgende Werte:

   $0, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 1$

   Erstelle das KV-Diagramm, markiere die Gruppen und ermittle die disjunktive Normalform.

Lösung:

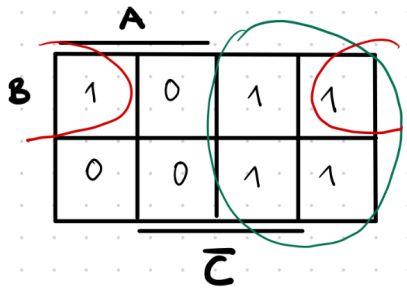


5. (3 Punkte) In der logischen Formel D kommen die Variablen A, B, C vor. Die Wahrheitstafel zeigt von oben nach unten folgende Werte:

   $1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1$

   Erstelle das KV-Diagramm, markiere die Gruppen und ermittle die disjunktive Normalform.

Lösung:



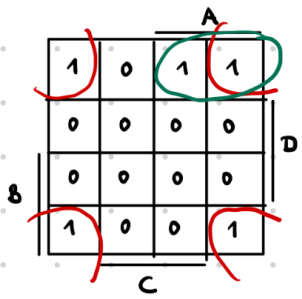
$DNF = \neg A \vee (C \wedge B)$

6. (3 Punkte) In der logischen Formel F kommen die Variablen A, B, C, D vor. Die Wahrheitstafel zeigt von oben nach unten folgende Werte:

   $1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0$

   Erstelle das KV-Diagramm, markiere die Gruppen und ermittle die disjunktive Normalform.

Lösung:



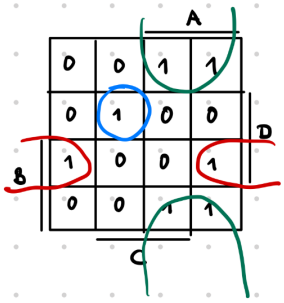
$DNF = (\neg D \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg D \wedge \neg B)$

7. (3 Punkte) In der logischen Formel F kommen die Variablen A, B, C, D vor. Die Wahrheitstafel zeigt von oben nach unten folgende Werte:

   $0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0$

   Erstelle das KV-Diagramm, markiere die Gruppen und ermittle die disjunktive Normalform.

Lösung:



$DNF = (A \wedge \neg D) \vee (B \wedge D \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C \wedge D)$

8. (2 Punkte) Berechne die Anzahl der theoretisch möglichen Gatter mit zwei Eingängen und zwei Ausgängen. Begründe die Rechnung.

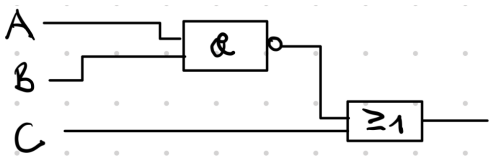
Lösung: Es gibt $2^2 = 4$ Eingangssituationen. In jeder dieser Situationen können die Ausgänge $2^2 = 4$ mögliche Werte annehmen. Insgesamt gibt es $4^4 = 256$ verschiedene Möglichkeiten.

9. (2 Punkte) Berechne die Anzahl der theoretisch möglichen Gatter mit drei Eingängen und zwei Ausgängen. Begründe die Rechnung.

Lösung: Es gibt $2^3 = 8$ Eingangssituationen. In jeder dieser Situationen können die Ausgänge $2^2 = 4$ mögliche Werte annehmen. Insgesamt gibt es $4^8 = 65536$ verschiedene Möglichkeiten.

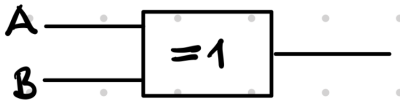
10. (3 Punkte) Erstelle ein Schaltbild mit 2 Gattern für die folgende logische Formel:
$\neg(A \wedge B) \vee C$

Lösung:

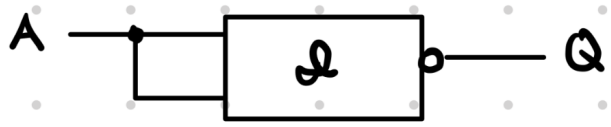


11. (3 Punkte) Erstelle ein Schaltbild mit einem Gatter für die folgende logische Formel:
$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$

Lösung:



12. (3 Punkte) Gegeben ist das folgende Schaltbild.



a) Erstelle eine passende Wahrheitstafel für das Schaltbild.

b) Gib an, durch welches Gatter die Schaltung auch realisiert werden kann.

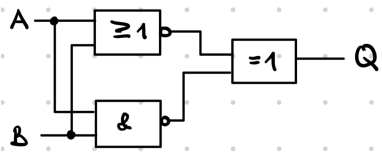
Lösung:

a)

A	Q
0	1
1	0

b) Die Schaltung kann auch mit einem NOT-Gatter realisiert werden.

13. (3 Punkte) Gegeben ist das folgende Schaltbild.



a) Erstelle eine passende Wahrheitstafel für das Schaltbild.

b) Gib an, durch welches Gatter die Schaltung auch realisiert werden kann.

Lösung:

a)

A	B	Q
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

b) Die Schaltung kann auch mit einem XOR-Gatter realisiert werden.

14. (3 Punkte) Gegeben ist das folgende Programm.

```
import itertools as it

for a, b in it.product([0, 1], repeat=2):
    print(a, b, int((a or b) and not (a and b)))
```

a) Gib an, was ausgegeben wird.

b) Gib an, welches Gatter die Formel im Programm beschreibt.

Lösung:

a)
```
0 0 0
0 1 1
1 0 1
1 1 0
```

b) XOR: Das Ergebnis ist 1, wenn genau eine der beiden Variablen 1 ist.

15. (2 Punkte) Erstelle die Wahrheitstafel für einen Halbaddierer mit den Eingängen X, Y und den Ausgängen S (Summe) und C (Übertrag).

Lösung:

X	Y	S	C
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	1

16. (3 Punkte) Erstelle die Wahrheitstafel für einen Volladdierer mit den Eingängen X, Y, C_{in} und den Ausgängen S (Summe) und C_{out} (Übertrag).

Lösung:

X	Y	C_{in}	S	C_{out}
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

17. (3 Punkte) Ein 4-Bit-Addierer aus einem Halbaddierer und drei Volladdierern berechnet $0110 + 0111$. Gib für jede Stelle, von rechts beginnend, die Summe S und den Übertrag C an, den das jeweilige Bauteil liefert. Gib auch das Ergebnis an.

Lösung:

Stelle	Eingänge	S	C
1 (Halbaddierer)	$0 + 1$	1	0
2 (Volladdierer)	$1 + 1 + 0$	0	1
3 (Volladdierer)	$1 + 1 + 1$	1	1
4 (Volladdierer)	$0 + 0 + 1$	1	0

Ergebnis: 1101 (dezimal $6 + 7 = 13$).